СЛАВКО МИЛИЋ, професор

ОЧИГЛЕДНА ГЕОМЕТРИЈА

ЗА II РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

ЦЕНА 20 ДИНАРА

Овај уџбеник препоручен је од Главног просветног савета Сбр. 161 од 14 јула 1932 и одобрен од Министарства просвете одлуком СНбр. 23594 од 17 августа 1932

ИЗДАЊЕ, ШТАМПА И ПОВЕЗ
ИЗДАВАЧКОГ ПРЕДУЗЕЋА „НАРОДНА ПРОСВЕТА" - БЕОГРАД

СЛАВКО МИЛИЋ
ПРОФЕСОР

ОЧИГЛЕДНА ГЕОМЕТРИЈА

ЗА II РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

ИЗДАЊЕ, ШТАМПА И ПОВЕЗ
ИЗДАВАЧКОГ ПРЕДУЗЕЋА „НАРОДНА ПРОСВЕТА"
БЕОГРАД

Сва права задржана

I СИМЕТРИЈА

1. СИМЕТРИЈА ТЕЛА ПРЕМА РАВНИ

(Огледалска симетрија)

1) Пролазиш поред излога. Изложене су исте ствари. Ипак на неке од њих главе не окрећеш, други ти привлаче пажњу, од неких ока не можеш одвојити. Откуда та разлика, кад су исте ствари изложене? — Јер су у једном ствари без реда набацане, у другом лепо и са укусом распоређене. Дакле тај лепи међусобни распоред тела привлачи твоју пажњу и изазива пријатност кад посматраш. Па и ти често премешташ ствари по столу, по соби, док им међусобни положај не буде најпријатнији за око. Неко уради то врло брзо — има око — а други мало спорије, јер није умео да види у чему лежи та вештина лепог и укусног распоређивања предмета. Геометрија ће ти помоћи да упознаш један врло лак начин лепог распоређивања.

2) И кад посматраш ма који предмет, исто осећаш. Пријатно ти је гледати лепи гранати бор, нежну љубичицу, шареног лептира (иако знаш да је штеточина), лепо развијено тело човечије... Равнодушан си, кад гледаш бачену кост, ивер, отпадак јабуке... Чак се непријатно осећаш и жалиш, кад видиш бор са покрханим гранама, неправилно развијено тело човечије или човека коме недостаје неки део тела. Зашто? Узми ма који цвет. Леп је. Откини неколико листића. Није више леп, искрзан је. Ти си покварио што је уметник — природа створила: Покварио си лепи међусобни распоред листића, делова цвета. — Ето добио си одговор: И код тела је врло важан међусобни распоред појединих делова његових. Од тога зависи хоће ли нам бити пријатно кад га гледамо или ћемо остати равнодушни, чак се и непријатно осећати.

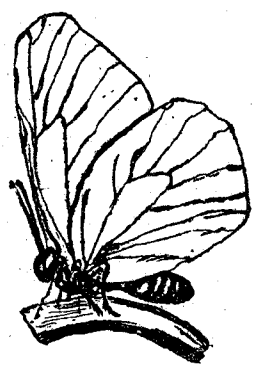
3) Испитајмо изближе, има ли каквог правила у том међусобном положају тела и делова његових. Твоје знање геометрије из I разреда јако ће ти олакшати проучавање. Као досада обратимо се природи. Даће нам одговор.

Припремио си лептира преко лета (сл. 1). Посматрај га пажљиво. Ти видиш: левом пипку одговара исти такав десни, левом крилу десно, свакој шари и вијуги на левом крилу одговара иста таква шара и вијуга на десном. Окрени га и по

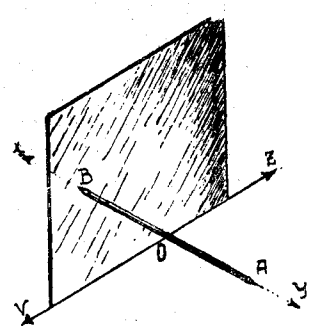
сматрај с друге стране. Изглед је друкчији, али видиш опет исти правилан распоред делова. Ма шта да нађеш на левом делу наћи ћеш и на десном. Ти осећаш да лептира можеш пресећи жилетом — груби модел равни — на две полутине и добити два тела, тако, да све што има лева полутина видиш и на десној полутини и то на исти начин распоређено према пресечној равни — жилету. Такав распоред делова једнога тела према једној равни називамо симетричан, ту раван зовемо раван симетрије а за тело кажемо да је симетрично према равни. Тај симетричан распоред делова једног тела према једној равни је оно што у нама изазива пријатност кад га посматрамо.

4) Ако уклониш на пример десну половину пресеченог лептира, па леву прислониш пресеком на равно огледало или танко стакло, одмах као да видиш целога лептира. Огледалски лик леве половине потпуно замењује уклоњену десну половину лептира. Зато се оваква симетрија једнога тела зове још и *огледалска.*

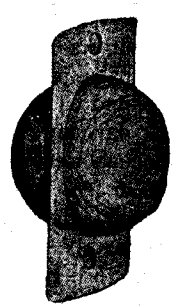
5)Ти увиђаш потпуно правилност у распореду лептирових делова. Ево огледа који ће ти показати како ћеш ту правилност геометриски изразити. Нацртај на хартији XY ⊥VZ.



Сл. — 1



Сл. — 2



Сл. — 3

Служећи се коцком постави чисто стакло нормално на хартију тако да му ивица поклопи VZ (сл. 2). Као што знаш, тада је XY нормално на равни стакла. Чим ставиш писаљку

ОА до стакла по нормали OY одмах иза стакла видиш њен лик. Друга иста таква писаљка ОВ стављена иза стакла по ОХ потпуно ће се поклопити са ликом прве писаљке. Обе писаљке чине симетричну целину и ти видиш да је дуж АВ која спаја симетричне тачке А и В нормална на равни симетрије — стаклу — и да је том равни преполовљена. Дуж која спаја две тачке зваћемо надаље *спојница.* Отуда ово геометриско правило о распореду симетричних тачака према равни:

Правило: Две су тачке симетрично положене према једној равни ако та раван полови њихову спојницу и стоји на њој нормално.

Дефиниција: Тело је огледалски симетрично, ако га можемо поделити једном равни тако, да свакој тачки једног дела одговара симетрично положена тачка другога дела.

6) Обе писаљке, које у овоме огледу чине симетричну целину, потпуно су једнаке, једна савршено замењује другу. Таква два тела називамо непосредно подударна или краће подударна.

Дефиниција: Два су тела непосредно подударна ако се разликују само по положају у простору и ни по чем другом.

На пр. таква су тела новоисковани динари, гипсане статуе изливене у истом калупу и т. д.

Па да ли код огледалски симетричног тела, на пример лептира, једна половина може потпуно заменити другу, т. ј. да ли су те две половине непосредно подударна тела? Од чоколаде направљени „мишићи" су као и лептири огледалски симетрична тела. Прережи жилетом таква два мишића по симетриској равни. Ти никако не можеш од две леве или две десне половине саставити једног мишића. Исто је то и са лептировим симетричним половинама. Кад би ухватио два потпуно једнака лептира и пресекао на симетричне половине, ти никако не би могао саставити целог лептира од два лева или два десна дела. Закључујеш: половине огледалски симетричних тела нису непосредно подударне.

7) Загледај на левом крилу лептира неколико делова поређаних у круг. На десном крилу налазиш исте такве делове поређане у круг *али супротним кружним смером.* И то

ти објашњава зашто половине огледалски симетричног тела не могу једна другу заменити, то јест зашто те половине нису непосредно подударна тела.

Навуци леву рукавицу на леву руку и стави пред огледало. У огледалу видиш десну руку у десној рукавици. Дакле десна и лева рукавица су једна према другој као десна и лева половина лептира. Исто је то са левом и десном ципелом. И код њих су једнаки делови поређани супротним кружним смером и не могу једна другу заменити. Нећеш обући десну ципелу на леву ногу; нећеш купити две леве ципеле или две леве рукавице, јер лева и десна нога (лева и десна рука) *нису непосредно подударне.*

Дефиниција: Два тела у којих су сви делови по реду једнаки али поређани супротним кружним смеровима називају се обрнуто или симетрично подударна.

Према томе: **Свако огледалски симетрично тело састоји се из два обрнуто подударна тела.**

8) И лопта је огледалски симетрична. Кад жилетом пресечеш једну лопту од гуме по главном кругу (сл. 3) па запиташ друга: који је део био десни а који леви док си је секао, он неће умети да погоди, јер су оба непосредно подударна. Па зашто су симетричне половине лопте непосредно подударне а код лептира нису? Зато што лопта није само огледалски симетрична, него има још друге две врсте симетрија о којима ћеш доцније учити. За сада запамти: *ако видиш да су две половине огледалски симетричног тела потпуно исте, непосредно подударне, онда то значи да тело има још једну врсту симетрије а не само огледалску.*

9) Посматрај свој модел тетраедра из I разреда. Ти видиш да је само огледалски симетричан, јер једна половина не може заменити другу. Провери. Али у исти мах јасно видиш да има више равни симетрије па закључујеш: *једно тело може имати и више од једне равни симетрије.*

10) *Симетрично положена тела.* — Два обрнуто подударна тела (на пример леву и десну половину лептира) не мораш саставити па да чине утисак симетричне целине. Довољно је да их положиш са разних страна једне равни тако, да свакој тачки једног тела одговара, према тој равни, по једна симетрично положена тачка другог тела. Ако их ма како друкчије положиш неће чинити симетричну целину, ниси их симетрично положио.

Дознао си један врло прост начин лепог и укусног распоређивања тела, тај распоред вршиш по оном простом геометриском правилу огледалске симетрије.

11) Учићеш доцније још о двема врстама симетрије, али је огледалска за нас најлепша. Кад у обичном говору кажемо симетрично тело или симетрично распоређена тела, обично мислимо само на симетрију према равни — огледалску симетрију. И није тешко разумети зашто. Погледај свога друга. Ти одмах осећаш да је он огледалски симетричан. И ако није постављена, ипак ти јасно „видиш" ту раван симетрије. Покажи је и покажи симетричне делове. Нос је један али симетричан, исто тако уста. Сваком делу с једне стране те равни налазиш симетричан део с друге стране. А да ли су таква два симетрична дела непосредно подударна? — Дакле, ми смо само огледалски симетрични, па зато нам се та врста симетрије највише свиђа.

Кад узмеш неко симетрично тело у руке, ти га и невољно обрћеш да се његова раван симетрије поклопи са твојом, јер у том положају најлакше осећаш симетричан распоред његових делова. Отуда претурени сто не изгледа ти симетрично. Из истога узрока невољно се извијаш при посматрању косо постављених симетричних тела.

12) Сада ти је јасно, зашто на први поглед откриваш недостатак на телу за које знаш да мора бити огледалски симетрично (на пр. разрокост итд.). Недостатак ти открива оно просто геометриско правило огледалске симетрије. По истом правилу врло лако и поуздано откриваш недостатке два или више тела удружених у симетричну целину (на пример завесе на прозорима).

Огледалска симетрија јако ти олакшава запажање у обичном животу. У геометрији ће ти она, чим је уочиш, јако олакшати проучавање геометриских особина тела.

13) Питања

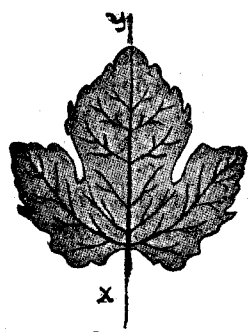
1) За која тела кажемо да су непосредно подударна, а која су тела обрнуто, симетрично, подударна? — 2) Кад кажемо за две тачке да су симетрично положене према једној равни? — 3) Кад кажеш да је тело симетрично према једној равни и како називаш ту раван? — 4) Како се друкчије назива симетрија према једној равни и зашто? — 5- Како гласи геометриско правило огледалске симетрије? — 6) Кад кажемо за два тела да су симетрично положена према једној равни. — 7) Ако су симетричне половине неког тела непосредно подударне, шта ти то показује? — 8) Може ли тело имати

више равни симетрије? — Да ли тада мора имати и коју другу врсту симетрије? — (Пази! Посматрај тетраедар.) — 9) Како распоређујеш тела да чине утисак симетричне целине? — 10) Зашто нам се највише свиђа огледалска симетрија? — 11) При каквом положају симетричног тела најлакше запажаш његову симетрију? — 12) Код којих тела и код каквих група тела лако откриваш недостатке? — 13) Да ли је половина симетричног тела сама за се симетрично тело? — 14) Да ли два обрнуто подударна тела ма у коме положају показују симетричну целину? —

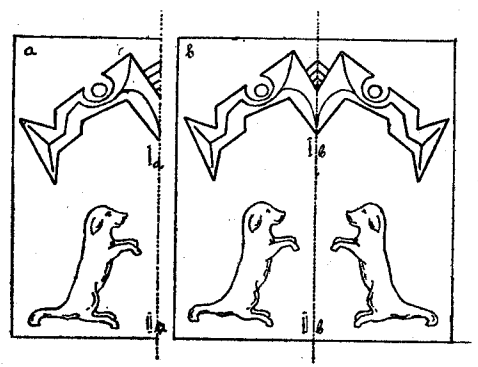
Вежбе. — 1) Загледај добро свог друга па кажи: да ли је у њега савршена огледалска симетрија? (По оном геометриском правилу.) — 2) Загледај пажљиво прсте на руци па кажи, јесу ли они симетрични? — Код ког прста осећаш највећма огледалску симетрију? — 3) Потражи пажљиво на квадру равни симетрије (има три). — 4) Могу ли се симетрични делови квадра међусобно заменити? Шта то значи? — 5) Је ли свака половина квадра симетрична? — 6) Потражи на коцки симетричне равни (наћи ћеш девет) па одговори на иста питања као и под 4 и 5. — 7) Потражи на ваљку равни симетрије, затим на лопти. Колико их је? — 8) У свом прибору и у учионици покажи неколико симетричних тела и кажи да ли и по чему познајеш, да морају имати и другу врсту симетрије а не само огледалску. — 9) Сети се неког предмета код своје куће које је симетрично, именуј га и кажи, колико има симетричних равни. — Због ког дела тигањ има само једну симетриску раван? Кад не би било тога дела, колико би их онда имао? А да ли би се и онда звао тигањ? — 10) Због чега једна чаша има само једну симетриску раван а друга их има безброј? — 11) Каква су два крила једног прозора? Може ли једно друго заменити? — 12) Које посуђе са две ушице има две симетриске равни, са једном ушицом само једну а без и једне би имало врло много? — 13) Како су обешене две слике, које зову „пандани"? — 14) Каква је љуштура у речне шкољке? — 15) Знаш ли коју животињу са врло много равни симетрије? — 16) Има ли која биљка много равни симетрије? — 17) Да ли више налазиш у биљном или у животињском царству делове и целе јединке са више равни симетрија? — 18) Кад је фасада куће лепо украшена? — 19) Зашто је тешко погодити колико је часова кад гледаш лик часовника у огледалу? (Сети се сл. 66 из I разреда. Сад разумеш оно „натрашке" поређане цифре.) — 20) Кад обе руке у исти мах крећеш, како ти је згодније и лакше, да ли обе у истом смеру или у супротном смеру према својој равни симетрије? — 21) Лупкај левом руком по глави а десном превлачи по прсима горе-доле. Није лако. Зашто?

2. ОСНА СИМЕТРИЈА РАВНЕ СЛИКЕ

14) У свом природопису видео си много слика огледалски симетричних животиња, биља и биљних делова: цвета и плода. Да би се што јаче истакла њихова симетрија, цртају се као што је на сл. 4 нацртан лист. Раван симетрије замењује права XY, која се назива симетриска оса или краће *симетрала*. Симетричне тачке обе половине листа цртане су према симетрали XY по познатом правилу огледалске симетрије: **Спојница сваке две симетричне тачке нормална је на симетрали и преполовљена је том симетралом.** Лако можеш то проверити или помоћу тространог врстара и шестара или



Сл. — 4



Сл. — 5

помоћу огледала. Ставићеш огледало (метално) нормално на раван цртања а по симетрали XY, па ћеш видети ипак цео лист, јер лик незаклоњеног дела потпуно замењује заклоњени део.

15) Ти знаш да су код огледалски симетричних тела симетричне тачке на левој и десној половини поређане истим редом али супротним кружним смером. Исто то видиш и на сл. 4. Али док ни на који начин не можеш довести до поклапања леви и десни део лептира (сл. 1), код осно симетричне равне слике ти ипак можеш поклопити оба дела. Ево како. Сети се да си у I разреду мало натезао док ниси поклопио два обрнуто подударна троугла, тространика (чл. 212). Шта си тада радио? Један си наопако обрнуо и поклопили су се.

Ти овде не мораш чак ни сећи леву половину листа. Наслони на сл. 4 провидну хартију па оцртај XY и главне делове листа. Кад прецрт преклопиш по XY ти видиш да се обе полутине тачно поклопиле.

16) Ово разматрање сл. 4 и извршени оглед дају ову дефиницију:

Равна слика је осно симетрична ако се може једном правом — симетралом — поделити на два дела који се обртањем око те праве потпуно поклапају.

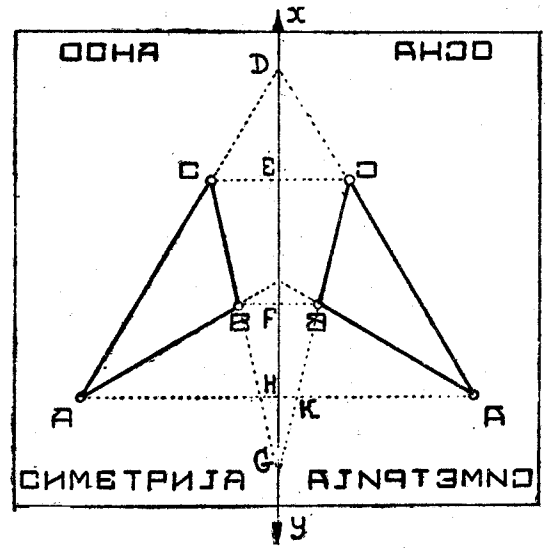
Није, дакле, довољно имати две обрнуто подударне слике, него их мораш по оном геометриском правилу довести и у нарочити положај према једној правој па да добијеш осно симетричну равну слику.

17) Из ове дефиниције дознајеш, како ћеш најлакше нацртати осно симетричну равну слику сл. 5. Стави „индиго" хартију за копирање сјајном страном на обичну хартију, па пажљиво, да се ни једно ни друго не набере, преклопи тако да обична хартија буде споља, а преклопна ивица с десне стране. Не притискај него овлаш цртај (сл. Ia) какву било шару. Ти помоћу хартије за копирање црташ у исти мах две слике обрнуто подударне и симетрично положене према преклопној ивици, оси симетрије. Сл. Ib показује ти шта си нацртао кад расклопиш хартију.

18) *Симетрично положене две слике.* — Понови исто што и у чл. 17 па у место да црташ шару која сече симетралу — преклопну ивицу — ти нацртај даље од ње какву хоћеш слику, на пр. пса. Опет си цртао, II а, истовремено две обрнуто подударне слике симетрично положене али сада без и једне заједничке тачке. Кад расклопиш, добијаш не једну симетричну слику него „две симетрично положене слике", II б. Зато кажеш: *Две обрнуто подударне слике симетрично* су положене према једној правој, симетрали, ако се обртањем око ње могу потпуно поклопити. Ти видиш да и такве две размакнуте слике чине пријатан утисак симетричне целине. За њих важи потпуно све исто што смо рекли за једну осно симетричну равну слику.

19) Место ма какве шаре нацртај на преклопљеној хартији као у чл. 17 само △ ABC. Цртај што пажљивије служећи се врстаром и напиши „осна симетрија". Кад расклопиш добијеш **врло важну слику 6.** Посматрај пажљиво. На њој ћеш научити врло много важних геометриских истина.

Прво што ти пада у очи, то је што не умеш прочитати натпис са десне стране и она 3 писмена, иако знаш шта си написао:



Сл. — 6

I правило осне симетрије: Код осно симетричне слике симетрични делови су поређани истим редом али супротним кружним смером (на пр. за C као симетрично јавља се Ↄ.

20) Због тога што се та два троугра, △ ABC и △ ↄBA, поклапају обртањем око XY дознајеш и ово:

II правило: Симетрично положене странице су једнаке међу собом (на пр. $\overline{AB}=\overline{\text{ↄA}}$) *и симетрично положени углови су једнаки* ($\sphericalangle BAC=\sphericalangle \text{ↄA}$).

21) Продужи симетричне странице н. пр. AC и ↄA. **Ако си тачно цртао, оне се морају сећи баш на симетрали у ·) D,** јер да си то радио док још ниси лист расклопио, ти би их једним потезом обе продужио. Отуда:

III правило: Симетричне странице секу се у истој тачки на симетрали и симетрала полови угао који оне граде.

22) Састави симетричне тачке A и A па ћеш још једном јасно видети.

IV оосновно правило: Симетрала полови спојницу сваке две симетричне тачке и нормална је на њој, на пр. AA или CC.

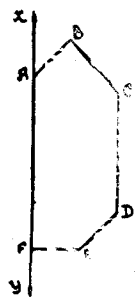
Напомена. Слику 6 можеш и на картону нацртати јер ће ти, као модел, често требати целе године. Можеш и овако радити: Преклопи картон врло пажљиво пошто жилетом засечеш дуж врстара осу XY, да би лакше преклопио. Помоћу игле начини три убода, да добијеш три тачке ABC. Расклопи па, састављајући врстаром убоде, нацртај пажљиво тушем све што видиш на сл. 6.

23) До ових важних правила могао си доћи чистим размишљањем посматрајући слику 6. Ти би казао: „Кад хоћу да поклопим леви троугао с десним, ја обрћем леву половину листа око XY. Тачка H остаје непокретна јер лежи на XY, па како ће тачка A пасти на тачку A значи да је доиста AH=HA. При том обртању поклопили су се и супротни зраци AH и HA на које симетрала дели праву AA, а то може бити само ако су праве XY и AA нормалне, према ономе што знам још из првог разреда" — Размишљањем си добио IV правило и видиш да то није тако тешко. Али да би размишљањем могао доказати нову истину, ново правило, мораш добро разумети и запамтити раније научена правила, јер помоћу познатих доказујеш нова правила.

24) Питања:

1) Кад кажемо за две равне слике да су осно симетричне? 2) Какве су међу собом две осно симетричне слике? Могу ли бити непосредно подударне? Шта би то значило? 3) Да ли су истим кружним смером поређани симетрични делови у обе слике? 4) Нацртај ма какву слику, прецртај је на провидној хартији, обрни наопако прецрт, па у близини прве слике нацртај јачим притиском оловке једну копију. Јеси ли нацртао симетричну слику? (Пази — симетрично значи и нарочити положај.) — 5) Како мораш цртати две обрнуто подударне слике па да их назовеш осно симетричне слике? 6) По ком ћеш правилу најбрже нацртати одједном обе слике? Или како ћеш одједном нацртати једну симетричну слику? 7) Нацртај сл. 7 тако да је DC ∥ XY а FE ⊥ XY. Тачке A, F, B, E бирај повољи. Како ћеш помоћу прибора за цртање по IV, основном,

правилу нацртати симетричну слику према XY? — 8) Кад за једну слику кажемо да је сама по себи осно симетрична? — 9) Шта преставља цртеж на сл. 5 као целина? — 10) Шта је симетрала симетричне слике? — 11) По ком ћеш правилу најлакше наћи две једнаке странице и по два једнака угла било у једној симетричној слици, било у две симетрично положене слике? 12) Ако је у једној симетричној слици (или у две симетрично положене слике) једна страница паралелна или нормална на симетрали, какав је положај симетричне странице према симетрали (види сл. 7)? — 13) Где лежи пресек симетричних страница? — 14) Које углове полови симетрала? — 15) На којим дужима симетрала стоји нормално и полови их? — 16) Да ли мора симетрала бити нормална на свакој дужи симетричне слике ако је полови? (Пази!) — 17) Може ли бити осно симетрична слика ако нема једнаких страница? — 18) Размишљањем докажи на слици 7 Ш правило осне симетрије.



Сл. 7

Вежбе. — 1) Окрени се према другу па опиши прстом у ваздуху круг у смеру часовне казаљке. Питај га: у ком смеру он види да описујеш круг? — 2) Којим кружним смером пишеш прво писмено у азбуци и како зовеш тај смер? — 3) Која писмена у азбуци пишеш у смеру часовне казаљке? — 4) Да ли су штампарска „слова" посредно или непосредно подударна са отштампаним писменима? — 5) Кад упијачом „осушиш" свеж потпис мастилом, какав је траг остао на упијачи? Да ли је то симетрична слика твом потпису? (Пази!) — 6) Како ћеш лако прочитати на упијачи, што је њоме „осушено"? — 7) Нацртај правоугаоник изрежи га, па преклапањем покажи да ли и колико има симетрала (више од једне). — 8) Можеш ли та два симетрична дела правоугаоникова потпуно заменити један другим? Ако можеш, шта то значи? — 9) Нацртај тачно квадрат, изрежи га, па преклапањем покажи, колико има симетрала (више од три). Одговори на иста питања као код правоугаоника. — 10) Да ли је ма код какве осно симетричне слике свака половина и сама симетрична (слика 6)? — 11) Кажи имена неких теби познатих слика чије су симетричне половине и саме симетричне. — 12) Поброј штампана симетрична писмена. — 13) Помоћу симетричних штампаних писмена напиши неколико симетричних речи. Мења ли се смисао, кад их читаш у супротном смеру (на пр. поп)? — 14) Да ли сваку реч коју можеш изговорити у оба смера без промене значења, можеш отштампати као симетричну слику? — 15) Да ли међу римским или међу арапским цифрама

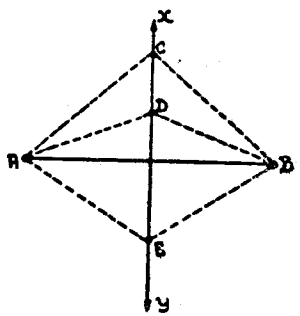
налазиш више симетричних? — 16) Изговори неколико симетричних бројева. Да ли може сваки такав написани број претстављати симетричну слику.

3. СИМЕТРАЛА ДУЖИ

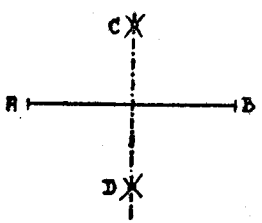
25) Кад посматраш ма коју дуж н. пр. $\overline{AA}$ или $\overline{BB}$ или $\overline{CC}$, на сл. 6, одмах видиш *да је свака дуж осно симетрична слика* јер се обртањем око XY лева половина ма које од поменутих дужи поклапа се десном половином.

26) Преклопи хартију и прободи иглом. У расклопу си добио две тачке, убода, A и B. Добио си $\overline{AB}$ и њену симетралу XY, преклопну ивицу (сл. 8).

Обележи неколико тачака на симетрали XY на пр. C, D, E... па их састави са A и B. Јасно ти је, преклапањем, да је $\overline{CA} = \overline{CB}$, $\overline{DA} = \overline{DB}$, $\overline{EA} = \overline{EB}$, па изводиш:



Сл. — 8



Сл. — 9

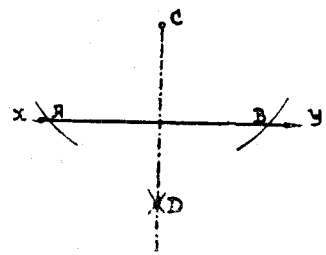
Правило: Свака тачка на симетрали дужи на истој је даљини од крајњих тачака те дужи.

Помоћу овога правила решићеш лако неколико важних конструктивних задатака служећи се само врстаром и шестаром.

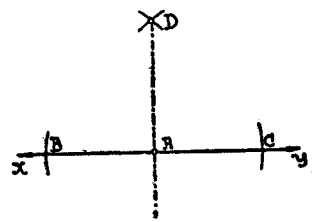
27) *Конструисати симетралу дате дужи.* Потребно је наћи две тачке те симетрале према горњем правилу (чл. 26). — Забошћеш челични врх у ·) A (сл. 9) па отвором већим од половине дужи описаћеш круг; истим отвором из ·) B описаћеш лук, па ће пресечне тачке C и D бити две тачке симетрале; састави врстаром и добио си симетралу дужи.

Напомена: Ради контроле добро је наћи још две тачке промењеним отвором шестара. Ако си добро цртао све четири тачке морају лежати на истој правој, симетрали XY. — Ако је $\overline{AB}$ при дну хартије те не можеш тражити тачке испод ње а ти нађи две тачке изнад.

28) Ти си овом конструкцијом решио и овај задатак: *Поделити дату дуж на 2, 4, 8, 16 ... једнаких делова.* Јер кад си цртао симетралу дужи ти си је преполовио; цртајући свакој половини симетралу, делиш целу дуж на четири дела и т. д.



Сл. — 10



Сл. — 11

29. ***Из ·) C ван праве XY спустити нормалу на XY*** (сл. 10). Описаћеш из ·) C лук који сече XY у ·) A и ·) B. Како је ·) C једна тачка симетрале дужи AB (зашто?) остаје да нађеш изнад или испод XY још једну тачку. Дакле из тачке A и B описаћеш луке који се секу у ·) D, па саставити ·) D са ·) C.

И овде важи напомена као у чл. 26.

30) ***У ·) A дићи нормалу на XY*** (сл. 11). Одмерићеш шестаром $\overline{AB} = \overline{AC}$, па из ·) A и ·) B отвором већим од $\overline{AB}$ опиши луке. Састави њихов пресек, ·) D, са ·) A, добијаш нормалу. Зашто?

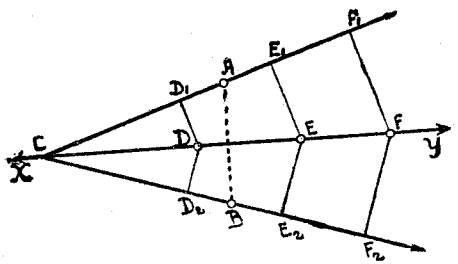
31) *Нацртати прав угао помоћу шестара и врстара.* — То си већ урадио у чл. 30 кад си из ·) A дигао нормалу на XY

4. СИМЕТРАЛА УГЛА

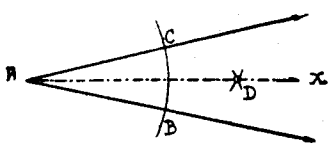
32) Сл. 6 показала ти је, да симетрала XY полови углове које граде симетричне странице на пр. ∢ADA, и да се ти делови обртањем око XY морају поклопити. Према томе:

Сваки угао је осно симетричан и његова симетрала је права која га полови.

33) Преклопљену хартију прободи иглом па кад расклопиш, добивене две тачке, убоде А и В, састави ма с којом тачком, на пр. •) С на преклопној ивици (сл. 12). Добио си ∢ АСВ и његову симетралу XY. Ма из које тачке симетрале, на пр. из D, E, F спусти нормале на оба крака. Да си то радио док је хартија била преклопљена, ти би једним потезом цртао обе нормале, дакле, оне су једнаке, т. ј. $DD_1 = DD_2$, $EE_1 = EE_2$... На овај начин дознао си:



Сл. — 12



Сл. — 13

Правило: Свака тачка на симетрали угла има једнаке нормалне даљине од кракова угла.

34) Посматрањем ∢ ADA на сл. 6 дознаješ најлакши пут за цртање симетрале угла помоћу шестара и врстара. Довољно је да нађеш једну тачку, на пр. •) G, јер је једна тачка симетрале угла само теме угла. Због симетричности ти видиш да је $\overline{GC} = \overline{GD}$, па како је из истих разлога $\overline{DC} = \overline{OD}$, то изводиш ову конструкцију: Из темена А (сл. 13) описаћеш лук да сече оба крака па из пресечних тачака, В и С, истим отвором описати два лука. Састављањем пресека, •) D са •) А добио си симетралу угла.

35) Поделити угао на 2, 4, 6, 8 .... једнаких делова. — Видиш и сам да ћеш угао преполовити кад му повучеш симетралу као на сл. 13. Затим свакој половини угла црташ симе тралу, те добијаш четвртине угла и т. д.

36) Како ћеш према томе нацртати шестаром угао од 45°. (Ти знаш да је $45^0 = 90^0:2$)

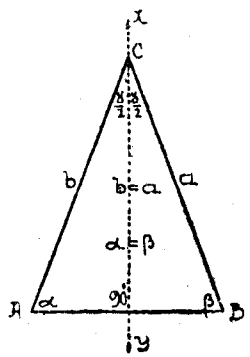
5. РАВНОКРАКИ И РАВНОСТРАНИ ТРОУГАО

37) На сл. 6 видиш неколико равнокраких троуглова. Именуј неколико. Посматрај равнокраки Δ ADA. Ти видиш: *Сваки равнокраки троугао је осно симетрична слика, његова је симетрала у исти мах и симетрала основице (треће неједнаке странице) и супротног јој угла. Углови на основици као симетрично положени једнаки су.* Све то показује поклапање сл. 6. На сл. 14. су назначене особине равнокраког троугла, јер је он осно симетрична слика.

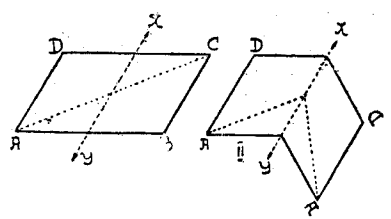
38) *Равнострани троугао можеш сматрати и као равнокраки, јер ма коју страну можеш узети као основицу.* Нацртај тако да му страница буде 3 cm, па кажи колико има симетрала и какви су унутрашњи углови.

6. ПРОВЕРАВАЊЕ ОСНЕ СИМЕТРИЧНОСТИ

39) Видео си из свега досадашњег колико ти може много користити осна симетрија при проучавању геометриских слика. Чим утврдиш да је слика осно симетрична, ти одмах дознаješ многе њене особине по она четири правила у чл. 20, 21, 22, 23. Али ти мораш прво **утврдити несумњиво да је слика осно симетрична а не само зато, што се теби**



Сл. — 14



Сл. — 15

тако чини. Већ си се толико пута преварио, јер ти око није могло да каже праву истину. Гледај слику 15. То је праволинијска слика чије су супротне странице паралелне. Теби се чини да је осно симетрична и да је њена симетрала XY. Провери, да се ниси преварио. За то имаш три начина.

40) I начин. Ако имаш огледало, стави га ивицом по XУ а да је нормално на слици. Заклонио си десну половину. Ако видиш ипак целу слику, т. ј. ако лик левог незаклоњеног дела потпуно замењује десни део, онда је доиста осно симетричан. Сл. 15, II ти показује, шта ћеш видети. Дакле наша слика није осно симетрична, бар XУ није симетрала. Огледало ће ти показати, да ни AC није симетрала. Та слика у опште није осно симетрична.

41) II начин. — Прво преклопи провидну хартију па је расклопљену стави на сл. 15. I, тако да се преклопна ивица провидне хартије поклопи са XY. Прецртај само леви део наше слике па обрни за 180° око XУ. Ако се прецрт поклопи са десним делом, слика је симетрична. И овај ти оглед показује, да је наша слика 15 осно несиметрична.

42) Ш начин. — То је примена геометриског правила осне симетрије (IV правило). Потражи ма којој тачки, на пр. за .) D, њену симетричну према XY, служиће се троглим врстаром. Неће бити .) C. Тачки A и не налазиш симетричне тачке. И овај ти начин казује што и прва два начина: слика није осно симетрична.

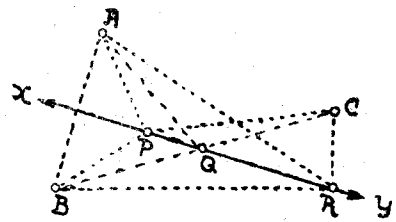
Вежбај се што више у проверавању на III начин, и покушавај да претходно оком потражиш симетричну тачку. Неће ти бити тешко, ако си поступио по упуту у I разреду. У старијим разредима научићеш да чистим размишљањем несумњиво утврдиш осну симетричност равне слике.

43) Немој мислити да те је око и овога пута преварило. Оно је запазило неку правилност у распореду делова сл. 15. Видео си да није осно симетрична. Тај правилни распоред делова сл. 15 је сасвим друге врсте. Проучићемо га и наћи доцније правила оваквог распореда делова једне слике. Али док не дознаш та нова правила, ти не можеш имати никакве олакшице при проучавању те слике. Само ако је слика осно симетрична, а то мораш несумњиво утврдити једним од она три показана начина, само тада можеш применити оно просто геометриско правило осне симетрије.

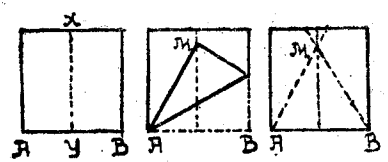
44) Питања

1) Шта је симетрала дужи? — 2) Какву особину има ма која тачка на симетрали дужи? — 3) Како се црта симетрала дужи? — 4) Како делиш дуж на 2, 4, 8.... једнаких делова? — 5) Како се шестаром диже нормала у једној тачки дате праве? — 6) Како спушташ нормалу на праву из једне тачке? — 7) Како се шестаром црта прав угао? — 8) Шта је симетрала угла? — 9) Какву особину има ма која тачка на симетрали угла? — 10) Како црташ симетралу угла? — 11) Како делиш угао на 2, 4, 8.... једнаких делова? — 12) Колико симетрала има равнокрак а колико равностран троугао? — 13) Кажи особине равнокраког троугла. — 14) Каква морају бити међу собом сва три унутрашња угла равностраних троуглова? — 15) Може ли бити осно симетрична слика, која нема једнаких странице? — 16) На колико начина и како провераваш, да ли је слика осно симетрична.

Вежбе и конструктивни задатци. — 1) XY је друм у равници, .) P, .) Q, .) R три дрвета на друму; .) A и .) B су према друму симетрично положене куће два пријатеља који, идући пречицом, налазе се свакога дана на друму и заједно одлазе на рад у .) C. Првог су се дана сачекали под дрветом P, другог под Q, трећег под R. Гледај на слику 16 па кажи: а) да ли су им се ма ког дана путеви разликовали по дужини; јесу ли сва три дана исти пут прелазили? в) ког су дана прешли најкраћи могући пут? — 2) Село A и C имају заједничког поштара који станује



Сл. — 16



Сл. — 17

у C, и мора сваког дана да на путу XY (сл. 16) сачека пошту и однесе у оба села. Наћи ком месту на друму треба да се упути из C, па да однесе пошту у A, одатле да се врати у C а при том да учини најкраћи пут? (види зад. 1 под б). — 3) Нацртај ма какав троугао па му нацртај симетрале све три странице. — 4) Нацртај квадрат па конструиши симетралу једне дијагонале. Шта си добио? — 5) Нацртај правоугаоник $a=5,^{cm}2$ и $b=4^{cm}$ па му једној дијагонали нађи симетралу. — 6. Нацртај квадрат па у једном темену дигни нормалу на дијагоналу. Према тој нормали као симетрали цртај симетрични квадрат. — Исто за правоугаоник. — 7) Нацртај правоугли троугао па сматрај хипотенузу за симетралу и нацртај симетричну слику. — 8) Нацртај троугао па му повуци симетрале сва три угла. Шта си приметио? — 9) Нацртај угао од 45°. — 10) Како ћеш нацртати симетралу угла који граде странице DE и CB на сл. 7. — 11) Нацртај угао па према једном краку као симетрали нацртај симетричан. — 12) Дали равнокрак и равностран троугао имају и који другу врсту симетрије сем осне? — 13) Како ћеш без врстара и шестара добити симетралу дужи нацртане на хартији? — 14) Како би

без употребе прибора за цртање добно симетралу угла? — 15) Како ћеш само преклапањем од неправилног парчета хартије добити правоугаоник а из њега квадрат? — 16) На сл. 17 видиш, како ћеш преклапањем начинити од квадрата равностран троугао. Преклопићеш по симетрали XY (I); расклопити, затим савити тако да .) B падне на XY а да се .) A не помери, па обележи .) M симетрале на коју пада .) B (II). Кад преклопиш сада по AM и BM добио си равностран троугао (сети се гледајући на I да је .) M симетрала за AB и да је $\overline{AM}=\overline{AB}$, III).

II УГАО

1. КОНСТРУКТИВНИ ЗАДАЦИ

У I разреду дознао си шта значи пренети дати угао и научио како ћеш преношењем упоредити два угла по величини. Зато ти неће бити тешко да решиш ове конструктивне задатке:

45) *Нацртати збир два угла.* — Пренећеш по зраку CX (слика 18-I) прво α, затим по новом зраку CY, и у истом кружном смеру, β, па си добио $\sphericalangle XCZ$ који је по величини као и оба дата угла. Најбоље је, при овом, прво описати истим отвором луке из A, B и C.

Како би нацртао збир три или више датих углова?

Како би то исто решио, служећи се угломером? То се зове *аритметичко решење.*

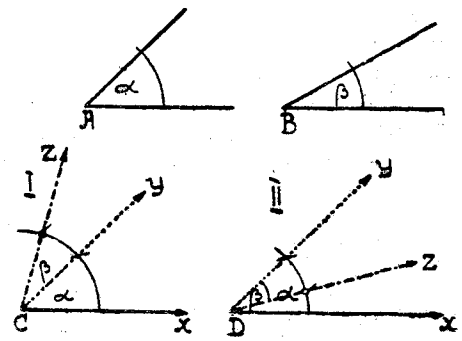
Напомена. — Кад ти је дата нацртана величина, као што су овде α и β, најбоље је чисто геометриски решавати задатке јер кад их мериш угломером несумњиво ћеш погрешити, пошто ти он даје само степене. Поново ћеш грешити кад, затим, преносиш угломером тај угао. Резултат неће бити тачан. Запамти, не само за углове него у опште, кад ти је дата нацртана геометриска величина, ти ћеш решавати задатак чисто геометриски, а да би избегао могуће погрешке, поновићеш бар два пута исту конструкцију пре него што извучеш тушем.

46) Може се десити при цртању збира да добијеш раван или прав угао. У геометрији се каже: Два су угла **суплементна,** ако им је збир раван угао т. ј. ако износе 180^0. — Два су угла **комплементна,** ако им је збир прав угао, т. ј. износи 90^0.

47) 1) *Нацртати датом углу суплеменат* (сл. 19 I). Продужићеш један крак AX преко темена па ће он са непродуженим дати суплеменат, $\sphericalangle YAX_1$.

2) *Нацртати датом углу α комплеменат.* — У темену A (сл. 19 — II) датога угла дићи ћеш $AZ \perp AX$ помоћу тространог врстара или шестара па си добио комплеменат $\sphericalangle YAZ$. (Какво би било аритметичко решење? Да ли би било тачније од геометрискога?)

48) *Нацртати разлику два дата угла.* — Радићеш (сл. 18 II) као и при цртању збира, само што ћеш угао β пренети по зраку DY у супротном кружном смеру, те добијаш тражену разлику $\sphericalangle XDZ$. (Како би радио аритметички?).



Сл. — 18

49) *Нацртати 2, 3, 4, 5... пута већи угао, значи* сабрати 2, 3, 4, 5.... једнаких углова, дакле решаваш као кад црташ збир. (Аритметичко решење било би све нетачније у колико већим бројем множиш).

50) *Поделити угао на неколико једнаких делова.* — Ти умеш да делиш угао на 2, 4, 8.... једнаких делова помоћу симетрале угла (чл. 35). *Али ма какав угао се у опште не може геометриски* (т. ј. *шестаром и врстаром) поделити на пр. на 3, 5.... једнаких делова.* Мораш решавати задатак аритметички (ма да унапред знаш да решење није потпуно тачно.) Измериће угао α угломером и налазиш на пр. 55^0. Ако га треба поделити на пет делова, сваки део износи $55^0 : 5 = 11^0$. Ставићеш затим угломер као да мериш угао па обележити цртицама 11^0, 22^0, 33^0, 44^0. Цртице саставити са теменом па си га поделио на пет једнаких делова.

Сл. — 19

2. РАЧУНСКИ ЗАДАЦИ О УГЛОВИМА

51) Ово је сасвим друга врста задатака, јер нису дати нацртани углови него њихове бројне вредности. На пр. $\alpha = 45^0\ 48'\ 51''$ и $\beta = 102^0\ 23'\ 47''$, израчунати њихов збир. Ти можеш овај задатак да сведеш на конструктивни задатак али ћеш исто тако погрешити, као и кад би хтео конструктивни задатак да решиш аритметички, рачунски. Јер би сада морао да нацрташ ове углове а не би их могао тачно нацртати; угломер не даје ни минуте а камо ли секунде. Резултат би морао бити нетачан.

Зато геометриски конструктивни задатак, т. ј. у ком су дати нацртани углови и дужине, решавај прибором за цртање, а ништа не мери. Геометриске рачунске задатке решавај аритметички а ништа не цртај. Само кад се од тебе то изрично тражи, смеш радити и на један и на други начин.

52) *Претварање углова у једноимене бројеве.*

1) Претворити $\alpha = 45^0\ 26'\ 18''$ у секунде. Водећи рачуна, о бројевима за свођење радићеш овако $45^0 . 60 = 2700'$; $2700' + 26' = 2726'$; $2726'.60 = 163560''$; $163560'' + 18'' = 163578''$. Дакле; $\alpha = 163578''$.

2) Претворити $\alpha = 45^0 27' 18''$ у степене. Прво деобом, $18'' : 60 = 0',3$ претворио си секунде у минуте те их има $27',3$. — Деобом $27',3 : 60 = 0^0.455$ претворио си минуте у степене. — Дакле, $\alpha = 45^0,455$.

53) *Пример за сабирање:*

$$\begin{array}{rl} \alpha = & 45^0 48' 51'' \\ \beta = & 102^0 23' 47'' \\ \hline \text{Збир} = & 148^0 12' 38'' \end{array}$$

Радићеш овако: Сабираш секунде па из збира 98″ издвајаш 1′, пишеш само 38″ а издвојени 1′ сабираш са минутима; из збира 72′ издвајаш 1^0, пишеш преостали 12′ а 1^0 сабираш са степенима.

54) *Пример за одузимање:*

$$\begin{array}{rl|l} \alpha = & 124^0 36' 42'' & 124^0 96' 102'' \\ -\beta = & -\ 57^0 47' 54'' & -\ 58^0 48'\ 54'' \\ \hline \text{Разлика} = & 66^0 48' 48'' & \end{array}$$

Пошто је број секунада и минута у умалитељу већи него у умањенику, да не би позајмљивао, десно је написано како се служиш познатим аритметичким правилом: разлика се не мења ако се умањеник и умалитељ повећају за исти број. Место 42″ написао си 102″ у умањенику, дакле повећао за 60″ т. ј. за 1′ те си зато и умалитељ повећао за 1′. Зато, место 47′, пишеш 48′. То исто видиш код минута умањеникових и код степена умалитељевих.

Вежбај се да овако повећавање вршиш у памети.

Комплеменат израчунаваш као допуну до 90^0 (на пр. за 62^0 комплеменат је $90^0 - 62^0 = 28^0$). Како израчунаваш **суплеменат?**

55) *Пример за множење:* — Наћи 25 пута већи угао од угла $\alpha = 2^0 18' 42''$.

$$\begin{array}{lrrr} & (2^0 & 18' & 42'').\ 25 \\ \hline & 10' & 90 & 210 \\ & 4 & 36 & 84 \\ \hline & 50^0 & 450' & 1050'' \\ \hline \text{Тражени угао} = & 57^0 & 47' & 30'' \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1050'' : 60 = 17' \\ \underline{450} \\ \ \ 30'' \\ \underline{467'} : 60 = 7^0 \\ \ \ 47' \end{array}$$

Помножио си посебно секунде минуте и степене. Десно си добивене секунде делио са 60 те пишеш остатак 30″ а издвојених 17′ придајеш минутима, затим 467′ делиш са 60, пишеш остатак 47′ а издвојених 7^0 придајеш степенима.

58) *Пример за деобу.* Наћи шестину угла $\alpha = 257^0 45' 25''$.

$$\begin{array}{l} \underline{257^0} \\ \ \ \underline{17} \\ \ \ \ \underline{5^0.60} \\ \ \ \ \ \underline{300'} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 45' \\ \underline{300'} \\ \underline{345'} \\ \ \ \underline{45} \\ \ \ \ 3'.60 \\ \ \ \ \ 180'' \end{array} \qquad \begin{array}{l} 25'' \ : \ 6 = 42^0\ 57'\ 34'',2... \\ \underline{180''} \\ \underline{205''} \\ \ \ \underline{25} \\ \ \ \ \underline{1''} \\ \ \ \ \ 10 \end{array}$$

Делиш прво степене па остатак 5^0 претвориш у миминуте, 300′, додајеш минутима те добијаш 345′, добивене минуте делиш даље са 6 па остатак, 3′, претвараш у секунде 180″, придајеш секундама па збир секунада, 205″, делиш са 6 као обичан број, употребљујући десетну запету. Деоба је завршена са десетим деловима секунде, те је последња деоба заокругљена, што се обележава тачкицама.

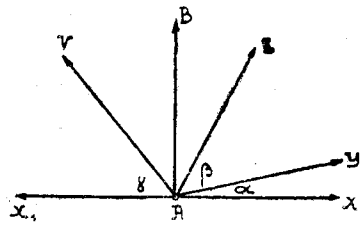
57) *Упоредити* $\alpha = 30^0 51' 54''$ *са* $\beta = 1^0 42' 53''$, *т. ј. видети колико се пута* β *садржи у* α. — Мораш претворити као у члану 52 све у степене или секунде, па онда делити као обичне бројеве. Кад претвориш оба угла у секунде добићеш $111114 : 6173 = 18$. Дакле α је 18 пута већи од β.

Напомена. Ти, засада, при мерењу углова нећеш умети ни моћи да измериш угао ни у минутима тачно. Земљомерска мерења вршићеш у степенима. Стручни земљомери се задовољавају да одреде угао тачно у минутима а секунде заокругљене на десетице.

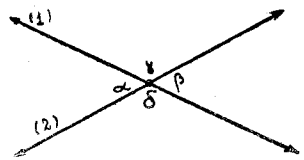
58) Питања

1) Шта значи геометриски конструктивни задатак и како га мораш решавати? — 2) Ако конструктивни задатак решиш аритметички, да ли добијаш тачан резултат? — 3) Шта називамо геометриски рачунски задатак и како га мораш решавати да добијеш тачан резултат? — 4) Шта је збир два угла (Сабирање углова)? Шта је разлика углова (Одузимање)? — 5) Шта значи конструктивно сабрати два угла и како називаш добивени угао? — 6) Шта значи то помножити угао? — 7) Који се конструктивни задатак о углу не може шестаром и врстаром решити? — Како га мораш решавати? — 8) Можеш ли тачно до минута да измериш угао? — 9) Шта називамо суплеменат датом углу; како ћеш га нацртати а како израчунати? — 10 Шта називаш комплеменат датом углу; како га црташ а како га израчунаваш? — 11) Шта је кос угао, и има ли сваки кос угао комплеменат? — 12) Ако су два суплементна угла једнака, колико онда сваки износи? — 13 Колики су једнаки комплементни углови? — 14) Можеш ли наћи испупченом углу суплеменат?

Вежбе. — Задаци. — Гледај на сл. 20, на којој је $AB \perp AX$ а $\alpha = 120\ 45'\ 27''$, $\beta = 490\ 14'$, $\gamma = 510\ 1'\ 48''$ па реши следећих седам задатак: 1) Покажи и израчунај углу 8 комплеменат и суплеменат. — 2) Наћи $\sphericalangle$ ZAB, па му одреди суплеменат. — 3) Наћи збир $\sphericalangle$ZAB, $\sphericalangle$ BAV и β. — 4) Наћи разлику β и $\sphericalangle$ ZAB. — 5) Израчунај три пута већи угао од збира углова β и γ. Како се зове такав угао? — 6) Колико је пута већи γ од α? — 7) Од збира угла β и γ одузми $\sphericalangle$ BAV па израчунај за колико је секунада већи од α. — 8) Из једне тачке повуци четири зрака, добио си четири издубљена угла $\alpha = 62^0\ 18'\ 42''$ $\beta = 52^0\ 37'\ 24''$, $8 = 87^0\ 11'\ 22''$. Колики је четврти и колико је пута већи од β? — 9) Збир два угла је $68^0\ 40'$ разлика 12^0, колики су то углови? — 10) Можеш ли нацртати тачно $25^0\ 12'$? — 11) Можеш ли нацртати угао који је разлика угла $\alpha = 12^0\ 15'\ 18''$ и $\beta = 7^0\ 15'\ 18''$? — 12) Можеш ли нацртати угао који је 240 пута већи од $5'\ 15''$? — (Задатак ти дозвољава да радиш и рачунски и конструктивно) 13) Нацртај угао који је 20 пута мањи од $10^0\ 40'$. — 14) Нацртај ма какав правоугли троугао, па тачно конструиши збир његових оштрих углова. Шта видиш? — 15) Измери оштре угле правоуглог троугла па израчунај њихов збир. Колико си добио? Упореди са задатком 14. — 16) Нацртај оштроугли, правоугли и тупоугли троугао па помоћу угломера измери и израчунавај, за се код свакога, колики је збир сва три унутрашња угла. Реши исти задатак конструктивно код сва три троугла. — 17) Колики угао опише велика казаљка за пет минута, за пет секунада, за два минута 4 секунде? — 18) Нацртај оштар угао па оцени од ока колико има степени. Провери угломером. (Ниси тачно оценио јер је врло тешко без дуге вежбе оценити угао а да се не превариш преко 10^0.) — 19) Нацртај три различна угла α, β и γ тако да α буде туп, па конструиши: збир сва три; разлику α и β; три пута већи угао од γ. Нацртај четвртину збира α и γ. Подели α на три једнака дела. (Може ли се то решити конструктивно?).



Сл. — 20



Сл. — 21

3. УГЛОВИ СА ЗАЈЕДНИЧКИМ ТЕМЕНОМ

59) Две праве (1) и (2) које се секу граде четири издубљена угла (сл. 21) са заједничким теменом. Често се у геометрији помињу по два таква угла, те ради бржег споразума о којима је реч геометрија сваком пару таквих углова даје нарочито име.

1. — **Упоредна** су она два угла која имају један заједнички крак а незаједнички су им краци два супротна зрака, на пр. β и γ.

Ти одмах видиш

Правило: Ма која два упоредна угла су суплементна јер граде један раван угао; (њихов збир износи, дакле, 180^0).

2. — **Унакрсна** су она два угла, која граде два ма која зрака и два њима супротна, нпр. α и β.

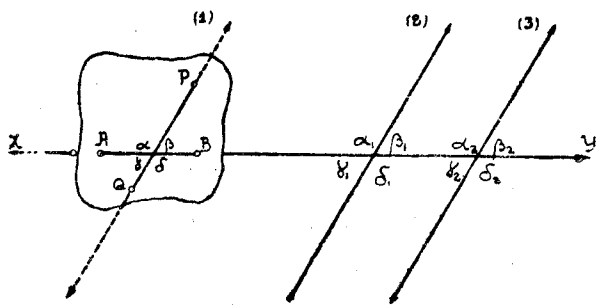
Ти видиш да ма који угао на пр. β са сваким својим упоредним било δ било γ, гради 180^0 а то значи да је $\delta = \gamma$.

Правило: Ма која два унакрсна угла једнака су међусобом.

4. ПАРАЛЕЛНЕ ПРАВЕ И УГЛОВИ

60) Послужи се својим транслаторним апаратом као у чл. 152 — I разреду, и обележи углове као на сл. 22.

Ти знаш да PQ при транслацији остаје паралелно свом првобитном положају, дакле, свака права (2), (3) паралелна с PQ показује само по један положај у који ће доћи PQ, дакле и права (1) при транслацији правцем XY. Према томе, и углови које ма која паралелна на пр. (2) гради са осом тран



Сл. — 22

слације XY: α_1, β_1, γ_1, δ_1 у ствари су углови α β γ и δ праве (1) са XY, само доведени у нови положај.

И, у опште, кад две паралелне праве (1), (2) пресечеш попречном правом — трансверсалом — XY (сл. 23.), ти знаш да ће се транслацијом правцем XY морати права (1) да поклопи са правом (2) те ће се и углови, које те две паралелне граде са XY морати поклопити, т. ј. $\alpha = \alpha_1$; $\beta = \beta_1$; $\gamma = \gamma_1$ и $\delta = \delta_1$ У чл. 59. видео си да су оштри углови једнаки међу собом исто тако и тупи а да ма који оштар ма са којим тупим износи 180^0. Дознао си врло важно геометриско правило:

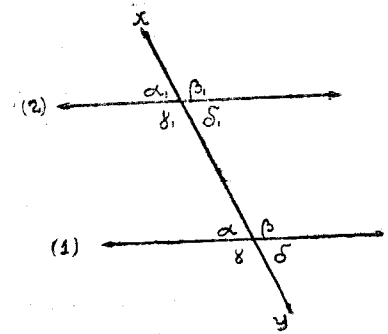
Правило: Кад се две паралелне праве пресеку трансверсалом добија се осам углова, четири једнака оштра и четири једнака тупа; ма који оштар и туп су суплементи.

Према томе, ако је ма који од ових осам углова прав и остали морају бити прави. (Објасни зашто.)

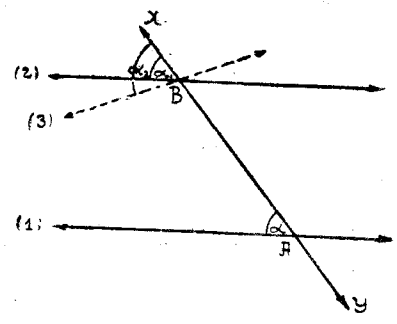
61. — Због врло честе примене ове важне особине углова са паралелним крацима, ради бржег и лакшег споразумевања о којима је реч, у геометрији се дају нарочити називи појединим паровима на разним теменима.

1. — *Сагласна* су она два угла са незаједничким теменима који леже са исте стране трансверсале и са исте стране паралелних правих. На пр. γ и γ_1, леже оба на „левој" страни трансверсале (сл. 23) и као што је γ испод (1) исто је тако γ_1, испод (2). Мало би друкчије казао кад би гледао на сл. 22. али у сваком случају по истом правилу. Као што видиш на сл. 23, ма која два сагласна угла саглашавају се и по величини, једнаки су.

2. — *Наизменична* су она два угла са незаједничким теменима који леже са разних страна и трансверсале и паралелних правих. На пр. на сл. 23 угли β и γ_1, јер док би за β казао десно према трансверсали и изнад паралелне (1), за γ_1, би казао лево према трансверсали и испод паралелне (2). Потражи сваком углу наизменичан, па дознаješ: да свака два наизменична угла морају бити једнака.



Сл. — 23



Сл. — 24

3. — Посматрај ма који пар углова, који нису ни сагласни

ни наизменични на. пр. α_1 и β па увиђаш: док је један оштар други мора бити туп, дакле су суплементи.

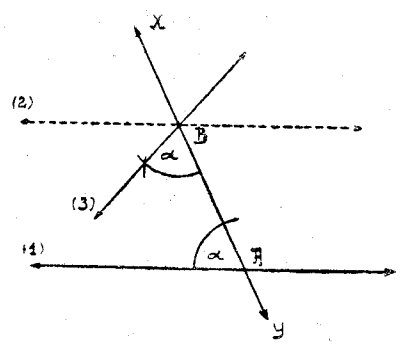
Према томе као правило може се рећи:

Кад две паралелне пресечемо трансверсалом морају бити једнака свака два сагласна и свака два наизменична угла. Угли који нису ни сагласни ни наизменични суплементни су.

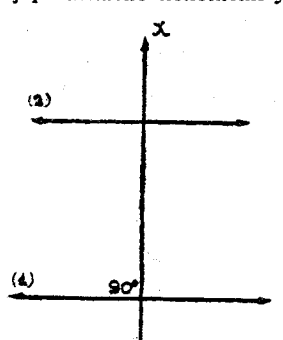
62) Ако кроз •) B поред праве (2) која је паралелна са (1) повучеш још једну коју било праву (3) она не може бити паралелна према (1), јер као што знаш, кроз једну тачку, •) B, можеш повући само једну паралелну са датом правом. У исти мах видиш (сл. 24) да та права (3) са трансверсалом XY гради друге углове, те да више нису једнаки ни парови сагласних ни парови наизменичних углова.

Правило: Две праве су несумњиво паралелне ако утврдимо да ма са којом трансверсалом граде два једнака сагласна или два једнака наизменично положена угла.

63 Сл. 25 ти показује да можеш кроз .) B повући косу (3) тако да угао α_1 буде једнака са α. Према чл. 58 морају се и код темена B одмах јавити сва четири издубљена угла по реду једнака са углима код темена A. Зашто? Дакле као и у чл. 60 добијаш четири једнака оштра и четири једнака тупа и сваки оштар ма са којим тупим износи 180°, али ове две праве (1) и (3) нису паралелне, јер сагласно положени угли



Сл. — 25



Сл. — 26

нису једнаки. *Само код паралелних правих сагласно или наизменично положена два угла могу и морају бити једнака.*

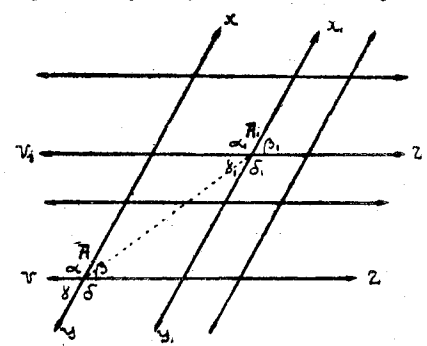
64) Сл. 26. показује ти још једном она два важна правила која си дознао у I разр. посматрањем транслације:

1. — Две праве, (1) и (2), нормалне на трећој, XY, морају бити паралелне међу собом.

2. — Ако су две праве паралелне, свака трећа права нормална на једној од њих мора бити нормална и на другој.

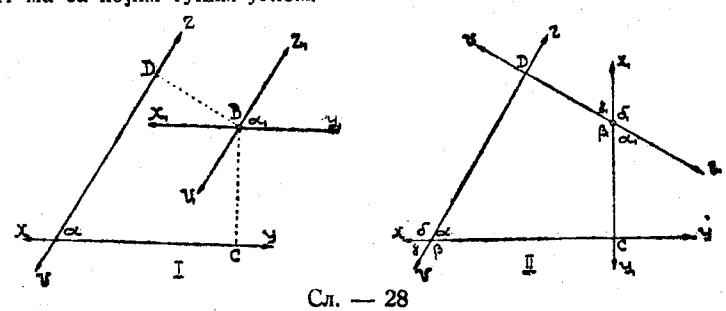
Докажи сада то по правилу у чл. 61 и 62.

65) Пресеци неколико паралелних правих, нпр. 4, са неколико, нпр. 3, паралелне трансверсале (сл. 27). Добио си 12 пресека и 12.4 = 48 углова. Посматрај углове ма око која два пресека, на пр. око .) A и .) A_1. Транслацијом правих XY и VZ правцем AA_1 чим се .) A поклопи са .) A_1 мора се XY поклопити са паралелном X_1Y_1 а права VZ са паралелом V_1Z_1. Тада се, као што видиш, сва четири угла са теменом A поклапају по реду са угловима чије је теме A_1 т.ј. можеш сматрати углове α_1, β_1, γ_1 и δ_1, као углове α, β, γ, δ доведене само у нов положај. Можеш проверити и огледом служећи се провидном хартијом.



Сл. — 27

Правило: Кад ма колико паралелних правих пресечеш са колико било паралелних трансверзала, добијаш свега две врсте углова, сви су оштри једнаки међу собом, тако исто и тупи а ма који оштар је суплеменат ма са којим тупим углом.



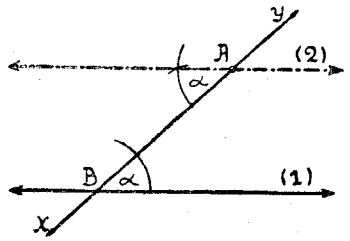
Сл. — 28

66) *Углови са паралелним крацима.* — Посматрај на сл. 27. ма која два угла, па ћеш прочитати ова правила:

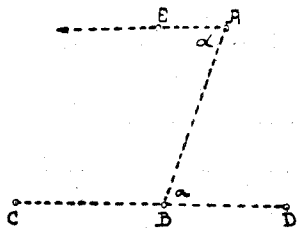
1 — **Два су угла једнака ако су им оба пара кракова паралелна било у истом смеру, било у супротном смеру.** Нпр. β и β_1 или α и δ_1

2. — Два су угла суплементна ако им је један пар кракова паралелан у истом смеру а други пар кракова паралелан у супротном смеру, на пр. γ и δ_1.

67) *Углови са нормалним крацима.* Нацртај две паралелне праве XY и X_1Y_1 па их пресеци са две паралелне трансверсале VZ иV_1Z_1. Спусти нормале из .) B на XY и VZ, поклопи провидном хартијом (сл. 28-I) па прецртај црвеном оловком X_1Y_1 и V_1Z_1. Утврди провидну хартију у .) B па изведи у смислу сахатне казаљке четвртину пуног обрта т.ј. да се BY_1 поклопи са BC (јер граде 90°). У исти мах се поклапа BV_1 са BD (јер и те две праве граде 90°). При овом обртању



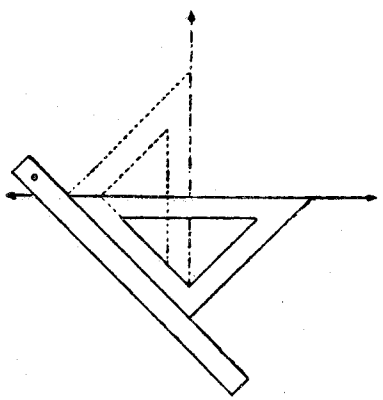
Сл. — 29



Сл. — 30

(сл. 28-II) углови око темена B нису се променили, дакле су остали једнаки са угловима око темена A. Али док су пре ротације краци били по два и два паралелна сад су кракови углова α, β, γ иδ, нормални на крацима углова α_1 β_1 γ_1 δ_1.

Правило: Два угла чији су краци међусобно нормални или су једнаки (ако су оба оштра или оба тупа) *или су суплементни* (ако је један оштар а други туп).



Сл. — 31

Цртање паралелних.

1. — Кроз .) A повући (сл. 29.) паралелну са (1). — Послужићеш се правилима о једнакости наизменичних (или сагласних) углова; кроз .) A повлачиш трансверсалу XY, по зраку AX преносиш угао α па добијаш (2) $\parallel$ (1).

2. — На терену кроз .) A, обележену кочићем, поставити паралелну са постављеном правом CD (обележену значкама). — Поставићеш значку B на праву CD (сл. 30) па ћеш пољским угломером измерити угао α и истом справом према AB с теменом у A поставити под истим углом праву AE (обележити значком), па је AE $\parallel$ CD. (Нарочито при теренским радовима не заборави да треба неколико пута све поновити да се добије што тачнији резултат.)

69) На хартији, паралелне и нормалне ипак је најлакше и најпоузданије цртати са два врстара, од којих један мора бити тачно проверени тространик. Сл. 31 показује како ћеш тространи врстар положити једним катетом по правом врстару па, транслацијом дуж правог врстара, цртати поред хипотенузе паралелне праве. Обртањем за 90° т.ј. наслањајући тространи врстар другим катетом на прав врстар, црташ поред хипотенузе нормале на мало час нацртане паралелне праве.

70) Питања

1) Шта називамо и какви су упоредни углови? — Који су и какви унакрсни углови? — 3) Нацртај две ма како положене праве, пресеци их трансверсалом. Покажи која два угла називаш сагласним а која су два наизменична. — 4) Ако две паралелне праве пресечеш трансверсалом, колико и какве углове добијаш? 5) Да ли се могу добити четири једнака оштра и четири једнака тупа угла, кад две непаралелне праве пресечеш трансверсалом? — 6) Каква су свака два наизменична (сагласна) угла кад паралелне праве пресечеш трансверсалом? — 7) За која два угла треба да дознаш да су једнака па да поуздано знаш, да су трансверсалом пресечене две праве паралелне? — 8) Какав је међусобни положај двеју правих, нормалних на трећој? — 9) Ако 10 паралелних правих пресечеш са 6 паралелних трансверсала, колико добијаш пресека, углова, колико различитих врста углова? — 10) Каква могу бити два угла чија су оба пара кракова паралелна (2 случаја). — 11) Каква су два угла чији су краци међусобно нормални? (2 случаја). — 12) Кад неколико паралелних правих пресечеш са неколико паралелних трансверсала па нађеш да је један угао прав, какви морају бити остали?

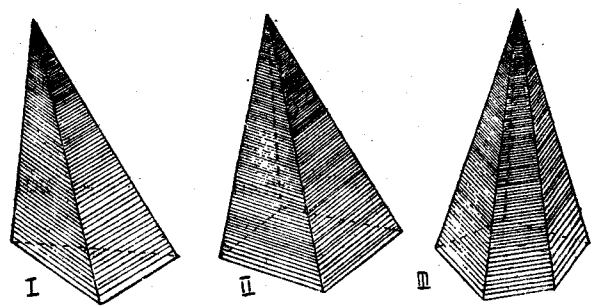
Вежбе и задаци. — 1) какав је међусобни положај симетрала два упоредна угла? 2) Какав је међусобни положај симетрала два унакрсна угла? 3) Нацртај 4 паралелне праве, пресеци их са три паралелне трансверсале а затим свих 7 правих пресеци заједничком трансверсалом: а) колико добијаш свега пресека; а) колико углова; в) да ли сада имаш само две врсте углова; г) потражи једном углу неколико једнаких и кажи какав им је смер кракова; д) једном углу потражи суплементне и кажи какав је смер кракова њихових према смеру кракова првог угла; ђ) Посматрај два једнака угла са разним теменима па покажи којим би двема транслацијама довео њихове кракове до поклапања (можеш на више начина) 4) Нацртај ма какав тространик па из једног темена повуци паралелну са супротном страницом. Потражи да ли си добио по два једнака угла. 5) Ако су две паралелне праве пресечене трансверсалом, па један угао износи 27° 35′ 14″, колики су остали? Колики је збир свих оштрих а колики је збир свих тупих? 6) Две су праве пресечене трансверсалом па је нађено мерењем да један оштар угао износи 75° 18′ 24″ а један туп на другом темену 104° 41′ 36″! Какав је међусобни положај тих пресечених правих (2 случаја). 7) Ако су краци једнога угла нормални на крацима другога па један износи 37° 45′ 28″, колики је други? (два случаја). 8) На сл. 6 ∢ ABC једнак је збиру углова ECB и BAH. Зашто? (Продужи BB). 9) Нацртај Δ ABC па одреди .) D на средини AB. Поклопи и прецртај тај троугао на провидној хартији, утврди је иглом у .) D, па изведи обртање за 180° т.ј. да тачке A и B измењају места. Какав је међусобни положај страница прецртаног и датог троугла? Видиш ли ту примену правила у чл. 66? 10) Нацртај две косе праве али тако да се не могу сећи на хартији. Како ћеш измерити један од 4 издубљена угла који оне граде? (Примени чл. 60). 11) Нацртај праву XY па из .) A повуци паралелну помоћу шестара а затим помоћу транслације. Ако не добијеш исту паралелну, кад си погрешио? 12) На терену постави једну праву и ван ње пободи један кочић, па повуци паралелну са постављеном правом и одреди раздаљину паралелних. 13) На терену постави две праве да се секу на неприступном месту (нпр. иза зида). Одреди угао између њих (чл. 60).

III ПИРАМИДА — ТРОУГАО

71) Сви модели на сл. 32, ма да „иду мало у криво", ипак те на први поглед потсећају на тела која си упознао у I разреду. И њихов се огртач састоји само из троуглова са заједничким теменом а основа је праволиниска слика. Разлика је само једино у броју страна које чине огртач, а то долази од броја страница праволиниске слике којом је и невољно постављаш на сто. Зато и њих геометрија зове истим именом:

пирамида. (Стара је и страна реч и мисли се да значи ломача, ватра, јер тако изгледа пламен који лиже, кад се наслагана дрва запале).

Дефиниција: **Пирамида је тело ограничено са једне стране ма каквом праволиниском сликом а са осталих страна само троуглима који имају заједничко теме.**



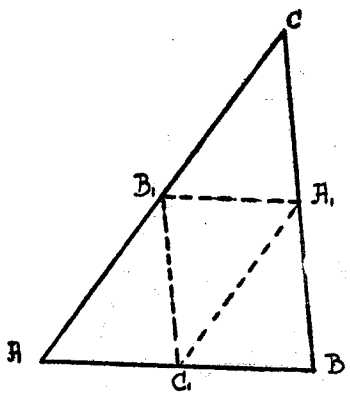
Сл. — 32

72) *Речник* пирамиде ти је донекле већ познат. Сад ћемо га поновити и мало допунити. Праволиниска слика на коју постављаш пирамиду зове се „основа"; троугли зову се „стране"; заједничко њихово теме зове се „врх" или „теме" пирамиде; даљина врха од основе је „висина" пирамиде; све стране заједно чине „огртач"; огртач и основа састављају пирамидин „омот"; „запремина" пирамиде је део простора ограничен пирамидиним омотом; ивице које се стичу у врху пирамиде зову се „бочне" а остале које граниче основу „основне" ивице. Према броју страна пирамида добија посебно име: тространа, четворострана, петострана и т. д.

73) Посматрај модел тростране пирамиде I. Ограничена је свега са четири троугла, те је можеш положити на сто ма којим од та 4 троугла. Код тростране пирамиде, дакле, ма коју граничну слику можеш сматрати за основу. Код модела II и III и не мислиш да их положиш ма којом граничном сликом него оном, која има више од 3 странице. Дакле, сем тростране пирамиде, све остале имају само једну основу.

74) *Мрежа* пирамиде, као и сваког тела, је равна слика коју добијаш кад основу и све стране, дакле цео омот, на-

црташ у једној равни (положиш, обориш). У IV раз. научићеш да градиш модел какве било пирамиде. Засада ћеш начинити овај модел: Нацртај ма какав △ABC (сл. 33). Одреди тачно средине страница: A_1 B_1, C_1 па састави те три тачке. Тиме си га поделио на 4 троугла. Ако си тачно радио, провидном хартијом можеш утврдити да су сва 4 подударна. Изрежи △ABC а по тачкастим линијама засеци жилетом да би лакше склопио тространу пирамиду ограничену са 4 подударна троугла.



Сл. — 33

75) Питања

1) Кажи дефиницију пирамиде. — 2) Која је заједничка особина огртача свих пирамида? — 3) Посматрај један модел пирамиде, па на њему, према пирамидом речнику, покажи поједине делове. — 4) Код које пирамиде можеш ма коју граничну слику сматрати као основу? Колико, дакле, има различитих висина? — 5) Колико издубљених углова видиш на огртачу четворостране пирамиде а колико на целом омоту? — 6) Како ћеш „видети" испупчени угао који граде ма које две ивице? (Геометрија за I разред, сл. 70). — 7) Шта називамо мрежом пирамиде? — 8) Колико има ивица петострана пирамида а колико ће се јавити кад јој начиниш мрежу? — 9) Како би са 8 шибица начинио један квадрат и 4 равностранa троугла?

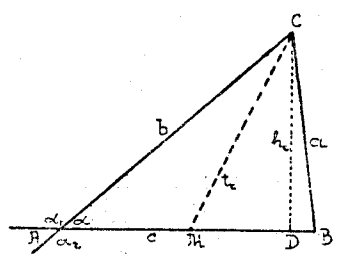
IV ТРОУГАО

1. УГЛОВИ У ТРОУГЛУ

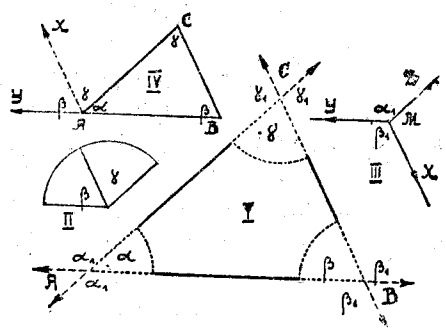
76) *Дефиниција:* **Троугао (тространик) је равна слика ограничена са три дужи.**

Нацртај само помоћу врстара ма какав троугао. Странице му неће бити једнаке, те не може бити осно симетричан (чл. 19. II). *Дакле, разностранu троугао је несиметрична слика* (сл. 34).

77) *Речник троугла.* — Познат ти је из I р. а сад ћемо га само допунити. Странице и три унутрашња угла зову се *основни* делови. Под *спољашњим углом* разуме се ма који упоредни угао ког било унутрашњег, на пр α_1 или α_2 (сл. 34). Како су таква два угла код сваког темена једнака као унакрсни, то се каже: Троугао има три спољашња угла (код сваког темена по један који било). Кад ма коју страницу сматраш за основицу, нпр. $\overline{AB}$, онда се нормална даљина $\overline{CD}$ супротног темена C зове висина. Троугао има, дакле, три



Сл. — 34



Сл. — 35

различите висине и свака одговара по једној страници. Бројна вредност измерене висине нпр. $\overline{CD}$ бележи се са h^c. Како ћеш обележити друге две? Дуж која спаја једно теме са средином супротне странице назива се тежишна линија, нпр. $\overline{CM}$ и њену бројну вреднос бележимо са t^c. Има их три. Покажи их и кажи како ћеш их обележити.

78) Између 6 троуглових углова постоји тачно одређена бројна веза. Једну видиш на први поглед: *сваки спољашни угао је суплеменат унутрашњем с којим има заједничко теме.* Остале везе показује ти модел на сл. 35.

Нацртај на картону ма какав △ABC (сл. 1) па, према моделу, продужи све странице преко темена и све обележи. Истим отвором шестара из сва три темена опиши луке па жилетом изрежи по тачкастим линијама. Да не испадају, прилепи испод првог картона још један.

79) Узми која било два унутрашња угла, нпр. β и δ, на-

чини њихов збир (II). Померањем лако ћеш довести да тај збир тачно поклопи спољашни угао α_1. На исти начин проверавaш да збир углова α и β тачно поклапа δ_1 а збир α и δ поклопиће β_1.

Правило: Ма који спољашни угао троугла једнак је са збиром два унутрашња с којима нема заједничког темена.

80) Кад си збиром β и δ поклопио спољашни угао α_1, ти си поређао једно уз друго и добио збир сва три унутрашња угла троуглова те читаш

Правило: — Збир сва три унутрашња угла у троуглу износи 180°.

Напомена. — Повуци AX ‖ BC (сл. IV) па ћеш по правилу 1. и 2. у чл. 61 видети да је $\sphericalangle YAX = \beta$ као сагласан $\sphericalangle XAC = \gamma$ као наизменичан. Као што видиш врло просто, без огледа, размишљањем дознаћеш оба ова правила.

Нацртај на обичној хартији $\triangle ABC$ као на сл. 35 са спољашним угловима па изрежи само спољашне углове и начини њихов збир. Оглед показује:

Збир сва три спољашна угла троугла износи тачно 360°.

Напомена. — Из произвољне ·) M (сл. III) повуци MY ‖ AB, MX ‖ BC и MZ ‖ AC па ћеш по правилу о угловима са паралелним крацима и размишљањем доказати ово правило.

Све што си доказао на оштроуглом троуглу докажи и на правоуглом и тупоуглом троуглу, али место да радиш као на моделу сл. 35, изрежи их маказама, отцепи која било два унутрашња угла па ћеш их моћи поређати око неотцепљеног тако да сва три граде раван угао.

82) *Последице.* — Тако се називају геометриске истине, које не мораш доказивати, јер су ти јасне због раније доказаних истина. Ево неколико последица које одмах разумеш, чим си научио правила о троугловим углима.

1. — У троуглу може бити највише један прав или један унутрашњи туп угао. *Два унутрашња угла морају бити оштра.*

2. — У правоуглом троуглу оштри унутрашњи углови морају бити комплементни (90°). Зашто?

3. — Сва три унутрашња угла равностраног троугла износе по 60° а сваки спољашни по 120°. Зашто?

83) *Употреба тространих врстара.* — Један твој тространи врстар је равнокракоправоугли троугао, те му оштри угли морају износити по 45°. Зашто? Њим ћеш се дакле служити за цртање углова од 45°. Како? Други твој тространи врстар је тачно половина равностраног троугла, један оштар угао износи, дакле, 60° а мањи 30°, зато ће ти он корисно послужити при цртању та два оштра угла.

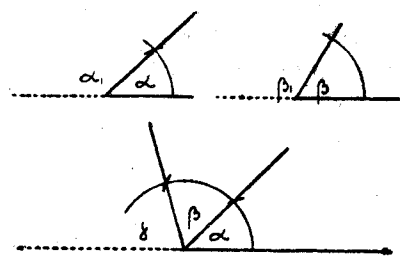
84) Због ових тачно одређених бројних веза, чим знаш два улга ма каквог троугла који немају заједничког темена, остале ћеш лако одредити. Ако су дате бројне вредности таква два угла, остале ћеш израчунати; ако су таква два угла нацртана и остале ћеш лако нацртати.

I Пример. — Израчунати све углове троугла, кад је (сл. 35) $\alpha = 42^0\ 35'$, $\beta = 75^0\ 25'$. Трећи, δ, је допуна до 180°. А спољашни?

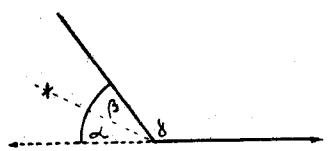
II Пример. — Ако је $\alpha_1 = 136^0$, $\delta = 71^0$, можеш прво израчунати унутрашњи угао $\alpha = 180^0 - 136^0 = 44^0$ па остале углове израчунати као малочас.

Код правоуглог троугла већ знаш прав угао те је довољно знати један кос па да остале одредиш. Сл. 14 ти казује да је и код равнокраког троугла довољно да знаш само један који било угао.

III Пример. — Конструктивно одредити остале углове троуглове кад су дата два, на пр. α и β (сл. 36). Кад продужиш крак ма кога датога угла добијаш спољашни, а кад нацрташ збир датих углова, онда суплеменат збира је трећи $\sphericalangle \delta$.



Сл. — 36



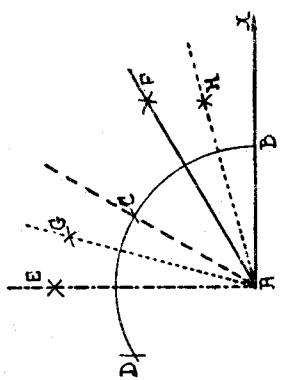
Сл. — 37

IV *Пример.* — Ако је на сл. 37 нацртани угао δ угао на темену равнокраког троугла, где се стичу једнаке странице, продужићеш један крак па је добивени упоредни угао збир она два једнака угла на основици, дакле, треба га преполовити.

85) **У I разреду видео си колико ти је олакшан посао при мерењу површја правоугаоникова кад си дознао за тесну везу између површја и димензија његових. Јер, уместо да непосредно мериш површје, што је и споро и тешко, ти измериш само његове димензије па чистим рачуном добијаш бројну вредност површја. Исто си то видео и при мерењу запремине квадра и коцке. Тесна и тачно одређена веза између лукова и средишних углова заменила је немогући посао непосредног мерења углова простим читањем бројева на угломеру. Сада, код троугла, видиш да не мораш знати свих шест његових различитих углова него само два са различитим теменима, па ћеш лако израчунати остале, јер си дознао тачну бројну везу између њих. Геометрија ти све више олакшава посао.**

86) Кад нацрташ ма какав равнострани троугао, ти знаш да си код сваког темена нацртао углове од 60° и да је сваки спољашни угао, тада, 120°. На основу тога лако ти је шестаром нацртати углове: 60°, 120°, 90°, 45°, 30°, 15°, 105°, 135°.

1. — Нацртаћеш по зраку AX (сл. 38) произвољним отвором шестара равнострани △ ABC, добио си ∢ BAC = 60°.



Сл. — 38

2. — Истим отвором шестара пресеци из •) C лук у •) D па си добио ∢ CAD = 60°, повуци његову симетралу AE па добијаш ∢ EAB = 90°.

3. — Како је ∢ CAE = 30°, то повлачењем симетрале његове добијаш ∢ GAB = 75°.

4. — Симетрала угла BAC даје ти 30° а његова симетрала 15°.

5. — Симетрала правог угла даће ти 45°.

6. — Како ћеш добити углове 105° и 135°?

У исти мах дознао си још један начин да шестаром нацрташ нормалу у •) A, јер AE ⊥ AX.

Изузетно прав угао можеш конструктивно поделити на три једнака дела. Како?

87) *Упутство.* — Сваку конструкцију изводи најпре добро заоштреном оловком. Ради контроле обнови сваку конструкцију промењеним отвором шестара. Кад си проверио да је конструкција тачна, потребне пресечне тачке означи, тушем, малим кружићима. Основне (дате) линије извлачи једноставно, помоћне линије цртицама или тушем у боји, а линије које показују резултат цртања јачим цртицама које су раздвојене тачкама.

88) Питања

1) Који су основни делови троугла? — 2) Који троугао има три симетрале, а који само једну? — 3) Шта су спољашни углови троугла и колико их има? — 4) Зашто не кажемо троугао има 6 спољашњих углова? — 5) Шта називамо основицом троугла? — 6) Шта је висина троугла, колико их је и како их обележаваш? — 7) Шта је тежишна линија, колико их је и како се обележавају? — 8) Да ли је сваки троугао симетричан? — 9) Колики је збир унутрашњих (спољашних) углова троугла? — 10) Какав је однос између спољашних и унутрашњих троуглових углова? — 11) Каква морају бити по величини два унутрашња угла а какав може бити трећи? — 12) Како зовеш два оштра угла правоуглог троугла? Може ли у њега бити један спољашни оштар? — 13) Да би могао израчунати све углове троугла, колико их мораш знати: у равнокраком, правоуглом, каквом било? — 14) Размишљањем докажи да је збир унутрашњих углова троугла 180°.

Вежбе. — Рачунски и конструктивни задаци. — 1) Да ли је тачно речено: унутрашњи углови троугла су суплементни? 2) У ком троуглу сваки спољашни угао износи 120°? — 3) Докажи да хипотенузина висина дели прав угао на два угла који су по реду једнаки са оштрим угловима његовим. — 4) Колики је збир углова на огртачу пирамида I, II, III на сл. 32? — 5) Како ћеш служећи се само врстаром нацртати три угла са незаједничким теменом а да је збир 180°, 360°? — 6) По зраку AX са теменом A нацртај угао од 45° угломером, шестаром, тространим врстаром, превијањем. Да ли си добио увек исти угао? Откуда разлика? — 7) Превијањем хартије начини све углове из чл. 86. — Како би, служећи се са обе врсте тространих врстара, нацртао те углове? 8) Колики су углови равнокраког троугла кад је један угао два пута већи од другог? — 9) Колики су оштри углови правоуглог троугла кад је један четири пута већи од другог? — 10) У △ ABC сл. 35 угао $\alpha_1 = 118^\circ\ 34'\ 42''$, $\beta = 78^\circ\ 52'\ 14''$. Реши ове задатке: а) израчунај остала четири угла; б) израчунај углове на које висина h_c дели γ (добијаш 2 правоугла троугла и знаш по један оштар угао); в) повуци висину h_b, израчунај делове на које је подељен β; г) колики је оштар угао који граде те две висине? (Те две висине су странице једног троугла у ком знаш два угла); д) повуци симетрале углова β и γ па израчунај туп угао који оне граде међу собом; ђ) колике угле граде међу собом h_c и симетрала угла β?; е) Повуци симетрале спољашњих углова α_1 и β_1 па одреди оштар угао који оне међу собом

граде. — 11) Колики су углови у Δ ABC кад је други за 20^0 већи од првог а за толико мањи од трећег? — 12) Конструиши углове: $22^0\ 30'$; $11^0\ 15'$; 150^0. 13) Нацртај два каква било угла да им је збир мањи од 180^0. сматрај већи за α а мањи за β па конструиши остале углове Δ ABC. — 14) Нацртај оштар угао на основици равнокраког троугла; нацртај осталих пет. — 14) На терену постави 3 значке. Помоћу пољског угломера одреди колико је потребно углова постављеног троугла а остале израчунај. Провери накнадним мерењем, да ли си прва два тачно измерио.

2. АКСИОМЕ И ТЕОРЕМЕ

89) Кад неком кажеш: целина је већа од сваког свог дела, на пр. јабука је већа од кришке, ти си казао истину толико јасну и очигледну за свакога да није потребно уверавати — доказивати — да је та истина тачна. Такве се истине зову *аксиоме.*

Аксиома је истина толико јасна и очигледна да је и не доказујемо, јер је за свакога разумљива.

На пример: део је мањи од целине; ако су две величине (на пр. 2 дужи) свака за се једнаке са трећом, оне су и међусобом једнаке.

90) Кад кажеш: збир унутрашњих углова троугла износи 180^0, ти си, такође, казао једну истину али за њу не зна свако, нити му је јасна и разумљива и кад му је кажеш. И ти ниси знао за њу у I р. Ти мораш уверавати, доказивати, да је она тачна, иначе се неће веровати у њу. Такве истине које треба доказати називају се у геометрији *теореме.*

I начин доказивања. — Нацртаћеш ма какав троугао, откинути два „угла" и ставити поред трећег тако да се очигледно види да доиста сва три угла чине раван угао т.ј. износе 180^0. Доказао си истину *огледом.*

II Начин доказивања. — Ако онај, коме доказујеш ову истину, зна о угловима са паралелним крацима, онда ћеш му доказати ову истину по напомени у чл. 80, дакле, помоћу правила о сагласним и наизменичним угловима. Доказао си истину размишљањем помоћу раније научених истина.

Теорема је истина која постаје јасна и разумљива тек кад се докаже било огледом било размишљањем помоћу раније научених истина.

Досад смо *теореме* звали *правилима.*

91) Огледом у чл. 33 доказао си теорему: свака тачка на симетрали угла има једнаке нормалне раздаљине од кракова.

Ти знаш да не би казао истину — теорему — кад би рекао: ма која тачка има једнаке нормалне даљине од кракова угла. Јер *само под* **претпоставком** да тачка лежи на симетрали угла, важи **закључак** да има једнаке нормалне даљине од кракова.

Исто тако кад кажеш: у равностраном троуглу сва су три унутрашња угла једнака, ти си казао: *само под претпоставком* да је троугао равностран т.ј. да су му све три странице једнаке важи *закључак:* сва три унутрашња угла су једнака.

Дакле, свака теорема **мора** имати *два дела:* **претпоставку и закључак.** *У претпоставци се исказује под којим је само условом тачан закључак, т.ј. истина исказана у закључку.*

Добро запамти, јер без тога нећеш тачно научити ни исказати ни једне теореме, јасно разликуј и истакни оба дела теореме: претпоставку и закључак. Ти мораш оба дела јасно осећати кад исказујеш теорему.

92) Вежбај се, да у свима досад наученим теоремама (правилима) раздвојиш та два дела и запамти да теореме мораш доказати, јер без тога оне нису јасне ни разумљиве

Најбоље ћеш их учити као што је показано у овом примеру:

Теорема. — Унакрсни углови су једнаки.

Нацртај унакрсне углове (чл. 59) па на листу хартије напиши овако:

1. **претпоставка** гласи: ако су два угла унакрсна . . . . .
2. треба доказати да је тачан
3. **закључак:** та два угла морају бити једнака.

Доказујем на основу тога, што видим да оба угла имају исти суплеменат; могу доказати и поклапањем.

У теореми: „унакрсни су углови једнаки" претпоставка се налази у једној речи „унакрсни", т.ј. ако су углови унакрсни. Зато кад рашчлањујеш теорему на два дела па не мо-

жеш одмах да нађеш претпоставку, а ти се сети да се она садржи у једном називу, обично у називу слике.

Засада већина твојих доказа биће оглед. Само неке ћеш умети лако да докажеш размишљањем. У вишим разредима све ћеш теореме доказивати само размишљањем помоћу раније научених геометријских истина.

93. — Питања

1) Шта је аксиома? — 2) Шта је теорема? — 3) Из која се два дела мора састојати свака теорема? — 4) Да ли би свако разумео, кад му први пут кажеш неку теорему? — 5) Шта мораш учинити па да теорема буде јасна и разумљива и ономе који за њу није знао раније? — 6) Какав је засада твој начин доказивања теорема у већини случајева? — 7) По упутству у чл. 75 проучи теореме чл. 20, 23, 26, 33, 38, 61, 80, 82. (Не заборави да претпоставку понекад садржи један назив, на пр. „симетрала дужи", „троугао" итд.) — 8) Да ли је тачно речено: Ма која тачка подједнако је удаљена од крајњих тачака дужи? Попуни шта не достаје, па искажи тачно теорему. — 9) Попуни да буду тачно исказане теореме, које су погрешно написане: а) Збир углова износи 180^0. б) Спољашни угао је једнак збиру два унутрашња угла. (Мораш на два места попунити.). в) Две су слике осно симетричне ако су обрнуто подударне. г) Две су праве паралелне ако са трећом граде по два једнака угла. — 10) Да ли умеш да без огледа докажеш неку од досад научених теорема? (Само размишљањем.)

3. ОДНОС ИЗМЕЂУ СТРАНИЦА И УГЛОВА У ТРОУГЛУ

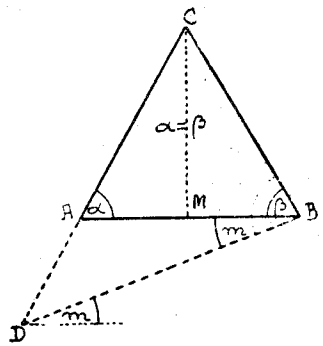
94) Нацртај равнокраки Δ ABC и његову симетралу CM (сл. 39). Већ знаш да је због симетрије $a = b$ и $\alpha = \beta$.

Теорема. **Према једнаким страницама троугловим леже и једнаки углови.** И обратно: **Према једнаким угловима леже и једнаке странице у троуглу.**

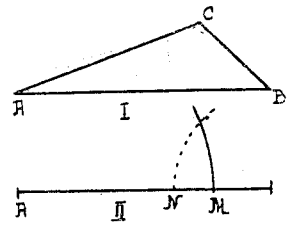
Састави ма коју тачку, на пр. $\cdot$) D, продужене странице AC са $\cdot$) B. Добио си нов Δ DBC, чији је $\sphericalangle$ CBD већи од α тачно за колико је његов $\sphericalangle$ CDB мањи од α. Дакле у њему је $\sphericalangle$ CBD $>$ $\sphericalangle$ CDB а у исти мах видиш да је и $\overline{CD} > \overline{CB}$.

Теорема. **Према већој страници троугла лежи и већи угао** И обратно: **Према већем углу лежи већа страница у троуглу.**

Последица: Хипотенуза је највећа страница правоуглог троугла. — Која је највећа страница у тупоуглом троуглу?



Сл. — 39



Сл. — 40

4. ОДНОС ИЗМЕЂУ СТРАНИЦА

95) Нацртај ма какав на пр. тупоугли Δ ABC (сл. 40). Ти знаш и видиш да је $\overline{AB}$ најкраћи пут између $\cdot$) A и $\cdot$) B. Пут преко $\cdot$) C, дакле збир страница $\overline{AC}$ и $\overline{CA}$, биће дужи, дакле:

И највећа страница троуглова мања је од збира других двеју.

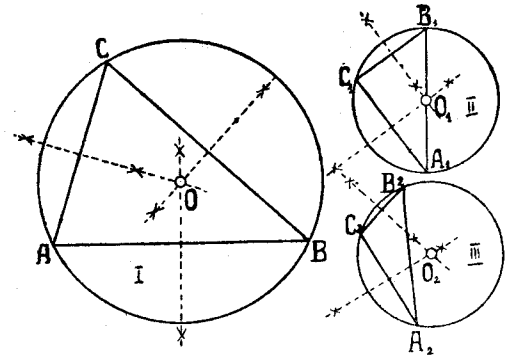
На слици 40 II видиш недовршену конструкцију Δ ABC, чија је највећа страница $\overline{AB}$, средња $\overline{AC} = \overline{AM}$, јер је њом описан лук. Да би довршио конструкцију, трећа најмања страница $\overline{BN} = \overline{BC}$ којом се описује лук из .) B мора очевидно ипак бити већа од MB иначе нема пресека т. ј. нема трећег темена тространиковог. Ти видиш да је MB тачно разлика двеју троуглових страница, па ти је јасно: И најмања страница троуглова мора бити већа од разлике других двеју.

Теорема: **Ма која страница троуглова мања је од збира али је већа од разлике других двеју страница.**

На пр. ако је $a = 8^{cm}$, $b = 6^{cm}$, онда је $c < 8 + 6$ и $c > 8\text{-}6$. Дакле лежи између 2^{cm} и 14^{cm}.

5. ЗНАЧАЈНЕ ТРОУГЛОВЕ ПРАВЕ КОЈЕ СЕ ПО ТРИ СЕКУ У ЈЕДНОЈ ТАЧКИ — ЧЕТИРИ ЗНАЧАЈНЕ ТАЧКЕ

96) Нацртај симетрале странице $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ у Δ ABC сл. 41 и обележи са O њихов пресек. Ти знаш да тачка O мора бити подједнако удаљена и од .) A и од .) B, јер лежи на симетрали странице $\overline{AB}$, дакле, мора бити $\overline{OA} = \overline{OB}$ (Осна симетрија). Према томе, ти се шестаром мо-



Сл. — 41

жеш уверити, да ли си добро цртао обе симетрале. Забошћеш челични врх у .) O, отворити до .) A па описати круг; он мора проћи кроз .) B, иначе ниси добро цртао. Али ћеш баш тада опазити да тај круг пролази и кроз теме C. Зашто? Јер .) O лежи и на симетрали странице $\overline{AC}$, дакле, доиста мора бити подједнако удаљено и од .) A и од .) C, $\overline{OA} = \overline{OC}$ Та је тачка подједнако удаљена од сва три троуглова темена, центар је круга, који пролази кроз сва три темена.

Круг на чијем обиму леже сва 3 темена троуглова зове се описани круг. Каже се: круг пролази кроз сва три темена. Зато се и .) O зове „центар описаног круга". Он је подједнако удаљен од сва три темена, колико од .) B толико и од .) C а то може бити само тако, ако лежи на симетрали странице BC. Према томе закључујеш: кроз пресек симетрала двеју троуглових страница мора проћи симетрала и треће странице.

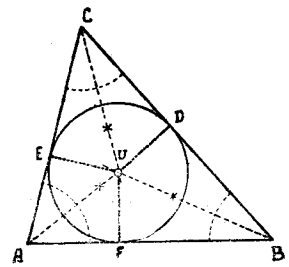
Тачна конструкција ће показати да се ма у каквом троуглу симетрале све три странице секу у једној тачки, па према правилу о тачкама на симетрали дужи доказујеш теорему:

Теорема: **Ма у каквом троуглу симетрале све три странице секу се у истој тачки која је центар описанога круга, јер је подједнако удаљена од сва три темена.**

Слика I, II и Ш казују: Да је центар описаног круга у обиму о-

штроуглог троугла, баш на средини хипотенузе код правоуглог троугла а ван обима тупоуглог троугла. Најлакше ти је дакле описати круг око правоуглог троугла, јер му је центар средина хипотенузе а полупречник тачно половина њена.

97) Пажљиво нацртај, сл. 42, све три симетрале углова у Δ ABC (ради контроле за сваку симетралу одреди бар по две тачке). Да си добро цртао, контрола је



Сл. — 42

Теорема: **Све три симетрале унутрашњих углова троуглових секу се у једној истој тачки.**

Пошто та тачка U лежи на симетралама углова, ти по правилима осне симетрије знаш да су њене нормалне даљине од кракова тих углова, дакле од троуглових страница, једнаке. Поред преклапања, ти се можеш уверити и шестаром на тај начин што ћеш прво из .) U спустити нормале на све три странице, забости челични врх шестара у .) U и отворити до подножја ма које нормале; видећеш да су те даљине доиста једнаке. Ако сад полако описујеш круг он ће те странице овлаш додиривати баш у подножјима спуштених нормала.

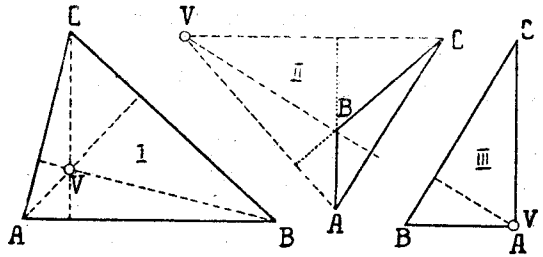
Круг који са страницама троугла има само по једну заједничку тачку, зове се додирни круг, уписани круг. За то се пресек симетрала углова троуглових зове центар уписаног круга.

Нацртај, исто тако пажљиво, симетрале углова у правоуглом и тупоуглом троуглу, па ћеш видети *да се увек симетрале углова секу у једној тачки, центру уписаног круга.* У исти мах видиш да тај центар лежи код свих троуглова у унутрашњости обима. (Запамти: центар уписаног круга лежи у пресеку све три симетрале углова: — **у-у**).

98) Кад нацрташ ма какав троугао у разним положајима (сл. 43) па у сваком помоћу шестара или тространог врстара пажљиво нацрташ све три висине, видећеш да је тачна

Теорема: **Све три висине ма ког троугла секу се у једној тачки,** која се зове *ортоцентар.*

Слика I, II, III показује ти да се та тачка V налази у унутрашњости оштроуглог троугла, код правоуглог троугла то је баш теме правог



Сл. — 43

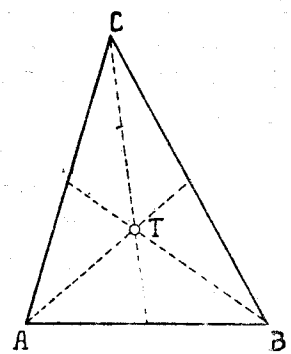
угла (јер су две катете висине његове), а код тупоуглог троугла је ван обима (јер си морао продужити две странице да би спустио висине).

99) У разним троуглима, као на слици 44, пажљиво цртај све три тежишне линије, па ћеш видети да је тачна

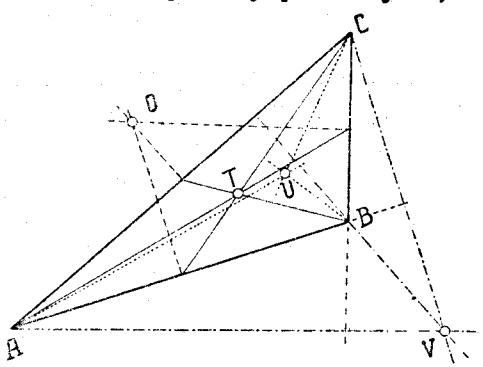
Теорема: **Све три тежишне линије троуглове секу се у** истој тачки. *Она је увек у унутрашњости његовој и зове се тежиште.* (Шестар ће ти показати да је код сваке тежишне линије део од тежишта до стране два пута мањи од дела до темена).

100) Нацртај мало већи, иначе ма какав, Δ ABC (слика 45) и тачно цртај све три висине, све три тежишне линије, симетрале страница и углова. Ти видиш да се линије разнога имена не поклапају али да се по три линије истог имена секу у једној тачки. Према томе сваки троугао има 4 значајне тачке које се уопште не поклапају, а само три увек леже на истој правој. Те се тачке као што већ знаш зову ортоцентар (пресек висина), центар уписанога круга, тежиште, и центар описнога круга. (V-U-T-O)

101) Због симетричности у равнокраком троуглу симетрала основице је у исти мах: **симетрала супротног угла, те-**



Сл. — 44



Сл. — 45

жишна линија и висина; зато, све 4 значајне тачке леже на симетрали, али се не поклапају.

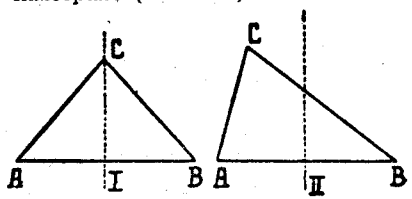
Само код равностраног троугла који има три симетрале све се 4 значајне тачке поклапају.

102) Већ си у неколико махова видео, колико је важна и лака примена осне симетрије. О томе смо већ говорили и ти знаш да мораш прво несумњиво утврдити да је то осно симетрична слика, па тек онда послужити се правилима симетрије. У тежњи да олакшаш себи посао, ти тражиш и видиш осну симетрију где је и нема, те сви закључци до којих будеш дошао биће нетачни. На пр. при цртању *ма каквог* троугла ти га обично црташ тако, да ти „изгледа" као равнокрак и видиш у његовој висини симетралу и то те доводи до погрешних закључака. Да не би грешио, увек промисли о каквој је слици реч.

1) Ако знаш да је симетрична а ти цртај одмах симетралу. На пр. кад се каже равнокрак троугао, ти ћеш нацртати (сл. 46 I) прво основицу и њену симетралу па на симетрали бирати треће теме.

2) Ако је, пак, реч о несиметричној слици, цртај је тако да се јасно види да није симетрична. На пр. реч је о разностраном троуглу. Цртај тада опет основицу, тачкицама обележи правац симетрале основице а треће теме бирај лево или десно од симетрале (сл. 46 II).

3) Ако не знаш о слици да ли је симетрична или не, онда провери једним од три начина и то нацртај неколико таквих слика служећи се само врстаром, да не би прво нацртана била случајно симетрична.



Сл. — 46

103) Питања

1) Нађи оба дела и докажи теореме у чл. 94, 96, 97. — 2) Има ли каквог односа између страница и супротних углова у троуглу? — 3) Можеш ли ма какве бројне вредности давати страницама једног троугла? — 4) Колико има значајних тачака у троуглу? — 5) Како добијаш центар описаног а како центар уписаног круга? — 6) Које значајне тачке леже увек у унутрашњости троугла? — 7) Где може лежати центар описаног круга а где пресек висина (ортоцентар)? — 8) Код ког троугла све 4 значајне тачке леже на истој правој, а код ког се све 4 поклапају и зашто? — 9) Шта значи описани, уписани круг код троугла? — 10) Како треба цртати

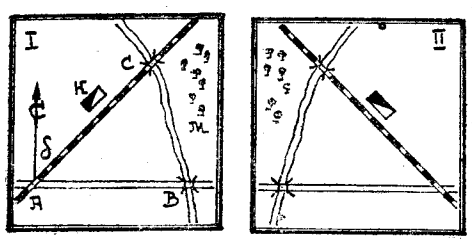
разностран троугао, да не би мислио да је симетричан т.ј. равнокрак. — 11) Је ли тачно казано: пресек симетрала је центар описаног круга?

- Вежбе. — Конструктивни задаци. — 1) Дате су дужи a = 12cm, b = 9cm, c = 8cm, d = 6cm, e = 4cm, f = 3cm. По које три дужи могу бити странице троуглове, а које три не могу бити? Да ли су a, c, f странице једног троугла? — 2) У једном троуглу $\alpha = 120^0$, $\beta = 65^0$ (сл. 37). Која ће страница бити највећа а која најмања? — 3) Може ли катет износити 4cm а хипотенуза 38mm? — 4) У дворишту избери три тачке па нађи четврту која је од све три подједнако удаљена? — 5) Затегни у дворишту три канапа да граде троугао. Како ћеш одредити тачку која је од сва три канапа подједнако удаљена? — 6) Сем троугла, знаш ли још коју слику код које се може и описати и уписати круг? — 7) Знаш ли коју слику код које можеш само описати круг? — 8) Нацртај равностран троугао a = 4cm па му опиши и упиши круг. — 9) Изрежи ма какав оштроугли троугао од тање хартије па преклапањем: покажи симетралу једног угла, симетралу једне стране, спусти висину, покажи тежишну линију. 10) Преклапањем троугла одреди му све 4 значајне тачке. — 11) Три куће (друма) граде троугао. На ком месту треба ископати бунар да буде на истој даљини од све три куће (друма)?

V ПРАВИЛА О ОДРЕЂЕНОСТИ ТРОУГЛА И ПОДУДАРНОСТИ ДВА ТРОУГЛА

104) Питао си се, како то људи граде географске карте. Морало те интересовати да дознаш, како то инжењери цртају планове, на којима као „на длану" јасно упознајеш земљиште — терен, иако на њему никад ниси био.

Сл. 47 I показује један такав врло прост план равног терена, преко кога води колосек AC са југозапада ка североистоку, друм AB са запада ка истоку и речица BC, образујући Δ ABC. K је караула, M шумица. Дуг и заметан посао претходио је цртању овог простог плана.



Сл. — 47

Инжењер и земљомери морали су што тачније премерити неке дужи и углове, па помоћу њих цртати план. Како?

1. —Јасно ти је да измерене дужине инжењер није могао пренети на хартију у правој величини него много мање, на тај начин, што је јединице којима је мерио у природи на плану претставио мањим дужинским јединицама. На пр. сваки километар у природи претставио је на плану сантиметром т.ј. 100 000 мањом дужином. Инжињер би рекао: Цртам план по размери 1 : 100 000 (један према сто хиљада).

2. — На плану се мора тачно видети да колосек AC иде са Ј. З. ка С. И. а друм AB са З. ка И. Дакле, не сме се мењати разлика та два правца т.ј. угао од 45° између њих. Према томе он мора што тачније мерити углове и уцртавати их у план без икакве промене.

3. — Разуме се да је морао прво на плану означити стране света и према правцу Север — Југ кроз тачку A почети уцртавање! Зато је морао измерити $\sphericalangle \delta$ који гради колосек са правцем С. — Ј. (Колики је тај угао на сл. 47?)

Напомена. Сл. 47 II показује, како би изгледао план, кад би, на пр. помоћу провидне хартије, прецртао све делове истим редом али обрнутим кружним смером, дакле, добио обрнуто подударну слику. Ти видиш да се тако не сме радити, јер је изглед терена сасвим измењен: колосек је прешао на исток а речица са шумицом на запад. Прецртавање се мора, дакле, вршити не само истим редом него и истим кружним смером.

105) Да би, на сл. 47, Δ ABC био што тачнији, инжењер је морао по неколико пута мерити неке дужи и углове. Знаш из теренских вежбања колико је то тежак и заметан посао. Зато је врло важно знати, колико се најмање основних делова мора измерити, па да се може потпуно тачно нацртати план, Δ ABC. Већ знаш да не мора мерити сва три угла него само два, јер чим је измерио два угла, трећи ће израчунати, пошто је он *зависан* од измерена два. Према томе неће мерити т.зв. ***зависне делове.***

Зависни делови троугла су:

1. — Делови које знаш, чим знаш, какве је врсте троугао. На пр. ако је правоугли троугао, одмах знаш прав угао; ако је равностран, одмах тачно знаш сва три угла. 2. — Делови који су тачно одређени раније измереним. На пр. трећи угао ма каквог троугла, кад си већ два измерио; други крак равнокраког троугла, кад си први измерио и т. д.

Важно је дознати са колико је најмање независних делова потпуно тачно одређен троугао. То се каже: *наћи правила о одређености троуглова.*

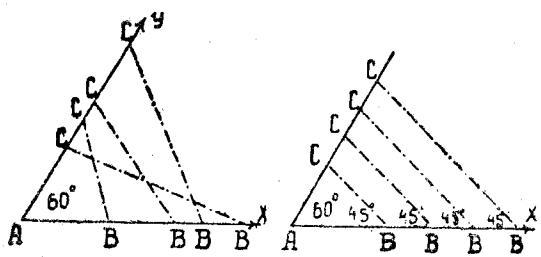
106) Кад дознаш са колико је независних делова троугао тачно одређен, то значи да си дознао, колико ти треба таквих делова да на разним местима црташ троугле који ће се разликовати само по положају, дакле, бити међу собом подударни. Према томе, чим дознаш правила о одређености једног троугла, дознао си: **За колико најмање делова треба**

утврдити да су једнаки по реду у два троугла па да несумњиво знаш да су међусобом подударни. То се краће каже: **Извести правила о подударности троуглова.**

Ако су у подударним троуглима једнаки делови поређани *истим кружним смером* онда су, као што знаш, непосредно подударни, а ако су поређани супротним кружним смером, троугли су обрнуто подударни.

107) Кад ти је досада било потребно утврдити подударност два троугла, служио си се провидном хартијом. Али, очевидно, тако не можеш радити на терену. Учећи геометрију, видећеш да се многе теореме лако доказују, кад се утврди подударност два троугла, а неће ти бити могуће да подударност провериш поклапањем. У тим случајевима врло ће ти корисно послужити правила о подударности троуглова, која ћеш сада научити.

108) Сл. 48 I показује неподударне троуглове а сви имају исти угао $\alpha = 60^0$. Сл. 48 II показује неподударне троуглове који имају све углове једнаке, по 60^0, 45^0 и 75^0. Према томе јасно ти је правило:



Сл. — 48

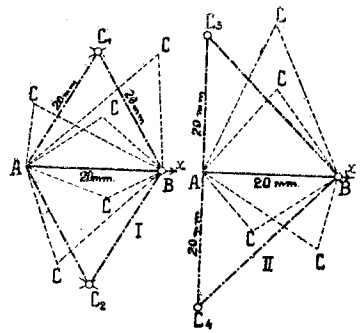
Правило: 1) троугао није тачно одређен кад му знаш само углове. — 2) Два троугла не морају бити подударна и ако су им сви углови по реду једнаки.

109) На сл. 49 I јасно видиш да можеш нацртати још колико хоћеш разних, међу собом неподударних троуглова са истом страницом $\overline{AB} = 2^{cm}$, али **само** два равностранa: $\triangle ABC_1$ и $\triangle ABC_2$. Преклапањем по $\overline{AB}$, увераваш се да су подударни. Сл. 49 II показује над истом страницом $\overline{AB} = 2^{cm}$ нацртано такође неколико неподударних троуглова, али **само** два међусобно подударна равнокрако правоугла троугла, $\triangle ABC_3$ и $\triangle ABC_4$ чији катети износе по 2^{cm}.

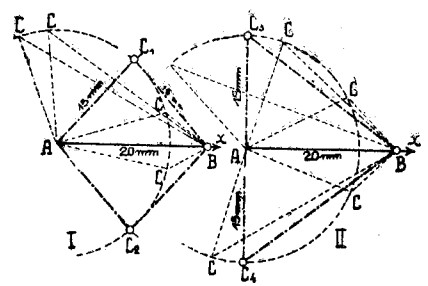
Правило: **Са једном страницом одређен је тачно само равностранн или равнокрако правоугли троугао.**

Изведи, из овога, правило о подударности два равностранa или два равнокрако правоугла троугла.

110) а) Кад ти се зада да нацрташ $\triangle ABC$ тако да је $\overline{AB} = 2^{cm}$ и $\overline{AC} = 15^{mm}$, ти ћеш прво по зраку AX пренети $\overline{AB} = 2^{cm}$ па из ·) A, као центра, отвором шестара од



Сл. — 49



Сл. — 50

15^{mm} описати кружну линију (сл. 50). Сваку тачку те кружне линије можеш узети као треће теме C траженог троугла. Можеш, дакле, нацртати безброј много неподударних троуглова са задатим двема страницама. Сл. 50 I показује да са те две странице можеш нацртати **само** два равнокрака троугла, $\triangle ABC_1$ и $\triangle ABC_2$, са основицом 2^{cm} и крацима по 15^{mm}; преклапањем око AB увераваш се да су међу собом подударни. Сл. 50 II показује да, исто тако, можеш нацртати **само** два правоугла троугла, $\triangle ABC_3$ и $\triangle ABC_4$, чији су катети по 2^{cm} и по 15^{mm}. Преклапање око AB показује да су подударни.

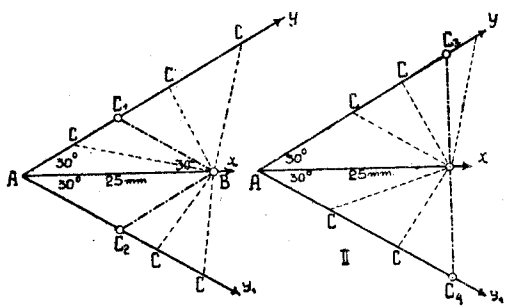
Дакле са две различите странице тачно је одређен само равнокраки или правоугли троугао.

б) Кад треба конструисати $\triangle ABC$ тако да је $\overline{AB} = 25^{mm}$ и налегли угао $\alpha = 30^0$, прво ћеш по зраку AX одмерити $\overline{AB} = 25^{mm}$ па у ·) A нацртати $\alpha = 30^0$. Свака тачка на краку AY биће треће теме траженог троугла, дакле их има безброј

много и нису међу собом подударни. Ако пренесеш $\alpha = 30^0$ и испод $\overline{AB}$, тачке на зраку AY_1 биле би такође треће теме; дакле, само би повећао број неподударних троуглова.

Али сл. 51 I јасно показује да можеш нацртати **свега** два равнокрака троугла, $\Delta\ ABC_1$ и $\Delta\ ABC_2$, са заједничком основицом $\overline{AB} = 25^{mm}$ и једнаким налеглим угловима, по 30^0, и преклапањем око $\overline{AB}$ дознајеш да су подударни.

Сл. 51 II показује да можеш нацртати, такође, **само** два правоугла троугла, $\Delta\ ABC_3$ и $\Delta\ ABC_4$, чији је један катет $\overline{AB} = 25^{mm}$ и налегли оштар угао $\alpha = 30^0$, па се преклапањем по $\overline{AB}$ увераваш о њиховој подударности.



Сл. — 51

Према томе дознао си теорему:

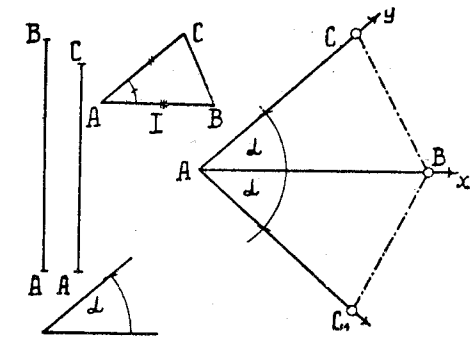
Теорема. — Са **два независна дела** (двема различитим страницама или једном страницом и једним косим углом) **тачно је одређен само равнокраки или правоугли троугао.**

111) Према овоме што си досада дознао, јасно ти је да равностран и косоугли троугао није тачно одређен са два своја независна дела, нити смеш тврдити да су таква два троугла међусобно подударна, ако утврдиш да су им само по **два** независна дела једнака.

Остаје да се испита, да ли је и са која три независна дела тачно одређен ма какав троугао. На сл. 35 видиш да та три дела могу бити: 1) једна страница и два која било угла (јер чим знаш два, трећи ћеш, као зависан, лако одредити); 2) две странице и захваћени угао; 3) две странице и угао према једној од њих и 4) све три странице.

I. Основна конструкција: *Конструисати троугао, кад су дате две странице и захваћени угао* (на пр. $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и α сл. 52).

Упутство: При сваком конструктивном задатку прво нацртај т.зв. **потсетну слику** т.ј. слободном руком нацртај, у крају, произвољно слику оне врсте која је поменута у задатку (у овом случају то је ма какав троугао). На потсетној слици (сл. 52 I) назначи цртицом сваки дати део и забележи поред њега бројну вредност, ако је дата. Потсетна слика јасно ће ти показати ред којим ћеш цртати дате делове. Ако је дат и угао, прво цртај ону страницу на којој лежи дати угао. Није важно какав ће положај заузети троугао кад га конструишеш. Кад се извежбаш у поузданом конструисању троугла помоћу датих делова, онда можеш бирати и нарочите „лепе" положаје.



Сл. — 52

Решење: Потсетна слика 52 I показује: по AX одмериш $\overline{AB}$, по њој, у ·) A, пренети α па из ·) A отвором $\overline{AC}$ пресећи крак AY. Добио си треће теме, дакле, **само** један тачно одређен $\Delta\ ABC$. Могао си пренети α испод $\overline{AB}$, па би добио још један $\Delta\ ABC_1$, који је подударан с првим (обртање око $\overline{AB}$). Дакле, ма где цртао троугао са ова три дела, сви ти троугли разликоваће се само по положају т.ј. подударни су са првим троуглом (непосредно или обрнуто). Можеш се уверити провидном хартијом.

I Правило: 1) **Троугао је потпуно одређен са две странице и захваћеним углом** (разуме се угао мора бити мањи од 180^0).

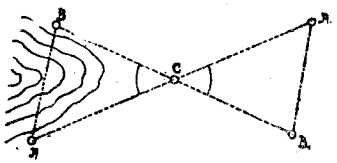
2) **Два су троугла несумњиво подударна, ако су им једнаке по две странице и захваћени угао.**

112) Важност овог правила увидећеш из овога теренског задатка: *Одредити раздаљину између две тачке A и B, кад се из једне не види друга, нити се од једне може другој приступити*, на пр. раздаљину између два дрвета ·) A и ·) B раздвојена брдом (Сл. 53). — Пободи значку у ·)C, из које се види ·) A и ·) B, па на познати начин продужи „праву" AC за $\overline{CA_1} = \overline{CA}$ и „праву" BC за $\overline{CB_1} = \overline{CB}$. По I правилу, у равници постављен $\Delta\ A_1B_1C \cong \Delta\ ABC$. Дакле, кад измериш $\overline{A_1B_1}$, измерио си $\overline{AB}$.

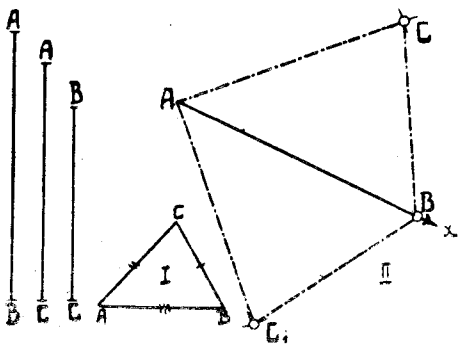
Што ти се у први мах учинило немогуће, постало је могуће и лако, јер си дознао и користио се овим важним правилом о подударности троуглова. Ти видиш колико је важно и ти ћеш га запамтити.

113) **II Основна конструкција:** *Нацртати троугао кад су дате све три странице.*

Потсетна слика 54 I упућује: по AX пренећеш $\overline{AB}$, из •) A описати лук отвором $\overline{AC}$, па га пресећи луком описаним из •) B отвором $\overline{BC}$. Добио си две тачке, дакле, два троугла, $\triangle ABC_1$ и $\triangle ABC_2$. Обртањем око $\overline{AB}$ проверићеш да су



Сл. — 53



Сл. — 54

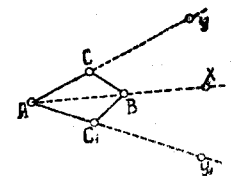
подударни. Дакле, ма где нацртао троугао са ова три дела, он ће бити непосредно или обрнуто подударан са $\triangle ABC$. Дознао си

II Правило: 1) **Троугао је тачно одређен са три странице.**

Ти знаш да ма која страница мора бити мања од збира а већа од разлике других двеју, иначе не можеш нацртати троугао.

2) **Два су троугла несумњиво подударна ако су све три странице једног једнаке са страницама другог троугла.**

114) Кад немаш пољског угломера, ово ће ти правило помоћи да на терену „пренесеш" угао који граде две, значкама постављене, праве AX и AУ (сл. 55). Н. пр. $\sphericalangle$ XAУ пренети у •) A по AX с друге стране. — Пободи у •) B кочић, да је $\overline{AB}$ око 5m, па навуци на значку A и кочић B алке, које су везане канапом око 12m. Помоћник ће затегнути значком C тај канап тако, да по твом указивању значка C буде на правој AУ, обележиће то место на канапу па ће, служећи се истим канапом и истом значком, пободи је у •) C_1 с друге стране од AB тако да C_1 одговара обележеном месту на канапу. Тим је постављен тражени правац $AУ_1$, јер $\triangle ABC \cong \triangle ABC_1$ по II правилу (у ствари овде је извршено обртање $\triangle ABC$ око AB).



Сл. — 55

115) **III Основна конструкција.**

а) *Конструисати троугао кад је дата једна страница и два налегла угла.* Нпр. $\overline{AB} = 30^{mm}$, $\alpha = 45^0$ и $\beta = 60^0$.

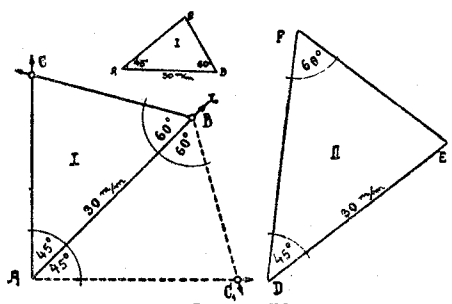
Потсетна сл. 56 I показује: по AX пренеси $\overline{AB} = 30^{mm}$, а по њој у •) A угао α, у •) B угао β. Пресек кракова та два угла даје само једну тачку C, треће теме. Дакле, добио си само један потпуно одређен $\triangle ABC$. Да си пренео α и β испод AB добио би још један $\triangle ABC_1$ очевидно обрнуто подударан с првим (око $\overline{AB}$). Ма где са ова три дела цртао троугле, они морају бити подударни. Провери.

б) *Нацртати троугао кад је дата једна страница, један налегли и један супротни угао.* — По чл. 84, I и III примеру, ти ћеш наћи трећи угао па добити оба налегла угла на дату страницу. Дакле си свео задатак на III основну конструкцију.

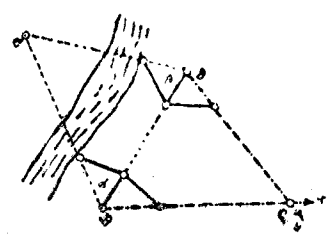
Према томе закључујеш:

III Правило: 1) Троугао је тачно одређен са једном страницом и два угла кад је познат положај њихов према датој страници.

Ти знаш да збир та два угла мора бити мањи од 180°. На сл. 56-II



Сл. — 56



Сл. — 57

нацртани Δ DEF и Δ ABC на сл. 56-I имају по једну страницу једнаку, $\overline{AB} = \overline{DE} = 3^{cm}$, и по два угла једнака, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 45^0$ и $\sphericalangle B = \sphericalangle F = 60^0$ (те су им и трећи углови једнаки), али ипак нису подударни, *јер једнаки углови нису на исти начин положени према једнаком пару страница,* „не иду истим редом". Због тога овако мораш исказати правило о подударности:

2) Два су троугла несумњиво подударна ако су им истим редом једнаки по једна страница и по два угла (оба налегла или по један налегли и по један супротан).

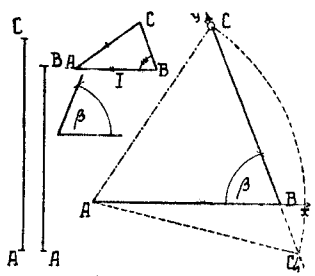
116) Занимљива и корисна примена овог правила је у овом теренском задатку: *одредити даљину од* .) *А до неприступне тачке,* на пр. дрвета С на другој обали реке. (Сл. 57).

Пободи две значке А и В тако да се из обе види .) С, поставио си на терену Δ ABC. Није ти потребан угломер. Својим канапом са алкама из чл. 114 лако ти је пренети α и β „десно" по $\overline{AB}$, дакле да поставиш зраке АХ и АУ. На познати начин (Геометрија I разр. чл. 109а) одредићеш и значком C_1 обележити њихов пресек. По III правилу $\Delta ABC_1 \cong \Delta ABC$. Дакле кад измериш страницу $\overline{AC_1}$ у равници постављеног ΔABC_1, ти си измерио $\overline{AC}$.

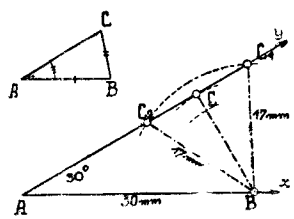
Важно је, дакле, ово правило подударности и није ти тешко да га запамтиш.

117) **IV Основна конструкција.**

а) **Конструисати троугао кад су дате две странице и угао према већој** н.пр. $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и β (сл. 58).



Сл. — 58



Сл. — 59

Потсетна сл. 58 I показује овај ред: по АХ пренећеш мању страницу $\overline{AB}$ јер на њој лежи дати угао β, па пренеси по њој у ·) В угао β. Из ·) А отвором $\overline{AC}$ описаћеш лук који мора сећи крак ВУ угла β, јер је $\overline{AC} > \overline{AB}$. Добијаш две тачке.

C_1 и C_2, дакле два троугла ΔABC_1 и ΔABC_2. **Ти видиш** да ΔABC_2 не одговара задатку, јер према страници AC_2 не лежи β него његов суплеменат. Дакле добијаш само један тачно одређен ΔABC_1.

в) **Нацртати троугао кад су дате две странице и угао према мањој** н.пр. $\overline{AB} = 3^{cm}$, $\alpha = 30^0$ и ВС да је мање од АВ дакле мање од 3^{cm}.

Потсетна сл. 59 I показује као и под а): пренеси прво већу страницу $\overline{AB} = 3^{cm}$, по њој у ·) А угао $\alpha = 30^0$. Треће теме добијаш кад крак АУ угла пресечеш луком описаним из ·) В страницом $\overline{BC} < 3^{cm}$. Слика 59 II ти показује: 1) ако је $\overline{BC} > 15^{mm}$, напр. 17^{mm} добијаш два неподударна троугла ΔABC_1 и ΔABC_2; 2) ако је $BC = 15^{mm}$, добијаш само један Δ ABC; 3) ако је $\overline{BC} < 15^{mm}$, нема пресека, нема троугла. Дакле, троугао није тачно одређен са две странице и углом према мањој него са две странице и углом према већој. Према томе дознао си

IV Правило: 1) Троугао је потпуно одређен са две странице и углом према већој од њих.

2) **Два су троугла несумњиво подударна ако су им једнаке по две странице и угао према већем пару једнаких страница.**

3) Троугао није тачно одређен са две странице и углом према мањој, нити су несумњиво подударна два троугла ако су им једнаке по две странице и угао према мањем пару једнаких страница.

118) Из свега овога можемо извести једно опште правило о одређености косоуглог и разностраног троугла.

Теорема: Троугао је потпуно одређен са своја три независна дела, кад је указан и ред њихов, сем ако су то две странице и угао према мањој датој страници.

119) Није важно запамтити по реду правила о одређености и подударности троуглова. Важно је добро их разумети и запамтити. Ма за какав троугао потребно је знати три основна независна дела. Видео си који су троугли одређени са два а који са једним основним независним делом.

Искажи сва правила о одређености и подударности: 1) за правоугли троугао; 2) за равнокраки троугао.

120) И за геометрију су врло важна ова правила о подударности, јер се помоћу њих лако може размишљањем утврдити за две дужи или два угла да су једнаки. То си видео у чл. 112. Ниси могао непосредно измерити раздаљину двеју, међу собом неприступних тачака, али си „поставио" два подударна троугла по I пр. подуд. па си мерећи A_1B_1 измерио $\overline{AB}$. Све ћеш чешће имати потребу у старијим разредима да се позиваш на правила подударности. Зато треба да добро разумеш, како се употребљују ова правила. Јер може се десити да су троугли, за које си доказао да су подударни, „незгодно" постављени те се можеш збунити при тражењу једнаких парова (страница или углова). Ради овако:

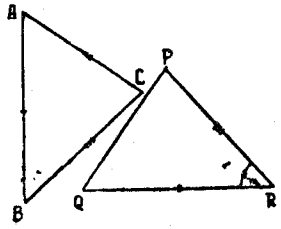
Пример. Утврдили смо, на пр. мерењем, да Δ ABC и Δ RPQ имају по три једнака дела (слика 60): $\overline{AB} = \overline{QR}$ (прецртај једном цртицом), $\sphericalangle \beta = \sphericalangle$ m (прецртај са по две цртице) и $\overline{CB} = \overline{PR}$ (прецртај их са по три цртице). Они су подударни по I правилу. Остале једнаке парове налазиш по простом правилу: *у подударним троугима према сваком пару једнаких страница лежи пар једнаких углова и обратно према сваком пару једнаких углова леже једнаке странице.*

Да би било што прегледније, писаћеш увек овако:

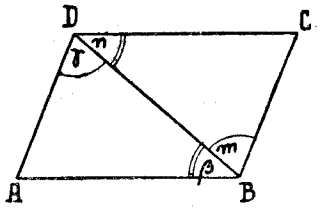
Знам да је:		*Према томе као супротан пар мора бити*
$\overline{AB} = \overline{RQ}$	јер сам измерио	$\sphericalangle \gamma = \sphericalangle$ p
$\beta = \sphericalangle$ m	„ „ „	$\overline{AC} = \overline{PQ}$
$\overline{CB} = \overline{RP}$	„ „ „	$\alpha = \sphericalangle$ q

Дакле по I правилу
Δ ABC ≅ Δ PQR

122) Као пример геометриске примене правила о подударности да докажемо ову *теорему:* Ако две паралелне праве пресечемо са две паралелне трансверсале доказати да су одсечене супротне дужи по две и две једнаке. (сл. 61)



Сл. — 60



Сл. — 61

Разуме се да се можеш уверити и огледом, на пр. маказама исећи слику ABCD па је по BD пресећи на два дела и проверити да ли се могу поклопити.

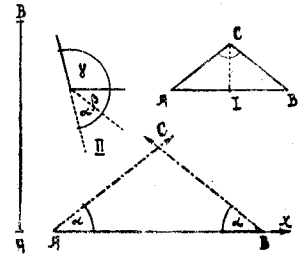
Али ми хоћемо размишљањем да утврдимо подударност тих делова Кад загледаш слику одмах видиш да Δ ABD и Δ BCD имају заједничку, дакле, једнаку страницу BD. Та је страница заједничка трансверсала за оба пара паралелних правих. Ти се одмах сећаш правила о угловима са паралелним крацима, обележаваш углове и пишеш:

I ЗНАМ ДА ЈЕ:	II МОРА БИТИ:
$\beta = \sphericalangle$ n као наизменични .	. . . . . $\overline{AD} = \overline{CB}$
$\gamma = \sphericalangle$ m као наизменични .	. . . . . $\overline{AB} = \overline{DC}$
$\overline{BD} = \overline{BD}$ као заједничка .	. . . . . $\alpha = \sphericalangle$ p
Нашао сам по три једнака дела дакле по III правилу Δ ABD ≅ Δ BCD	Доказао сам: Паралелне дужи између паралелних једнаке су

Десну страну не смеш попуњавати све док не докажеш да су троугли доиста подударни т. ј. док не утврдиш несумњиву једнакост три њихова основна дела.

123) **Упуство за конструкцију троуглова.** Као што си радио код основних конструкција, тако ћеш и убудуће увек, пре сваке конструкције, нацртати потсетну слику оне врсте коју задатак тражи. На пр. ако се каже конструисати равнокрако правоугли троугао, слободном руком нацртаћеш правоугли троугао и назначити да су му оба катета једнака.

Пример: Конструисати равнокрако тупоугли троугао кад му је дата највећа страница $\overline{AB}$ и туп угао. (Сл. 62). — Потсетна слика 62 I (на којој си тачкастом линијом назначио симетралу основице, да би се потсетио да је реч о равнокраком троуглу) казује: Дата је страница и супротни угао, дакле, случај који досад нисмо имали, јер нам треба бар један налегли угао. Али то је равнокраки троугао и ти знаш како ћеш конструктивно помоћу датога тупога угла одредити оба угла на основици (сл. 62 II). Тиме си задатак решио јер си га свео на III осн. конструкцију.



Сл. — 62

124) **Веза између троуглових делова.** — *Чим знаш три независна троуглова дела, ти га тачно можеш нацртати а при цртању* **сами по себи јављају се** *и сви остали дело-*

ви тога троугла и ти можеш ма који од њих измерити са онолико тачности, колико ти врстар и угломер допушта. Дакле чим знаш три независна дела једнога троугла потпуно су тачно одређени и сви остали његови делови, јер потпуно од њих зависе.

Пример: Колико ^{mm} износи полупречник описаног круга око троугла чије су странице $a = 5^{cm}$, $b = 6^{cm}$, $c = 7^{cm}$. Нацртај троугао (друга основна конструкција). Одреди центар описаног круга помоћу симетрала страница па врстаром измери, колико је тај центар удаљен ма од кога темена. Наћи ћеш, ако тачно црташ, да је полупречник између 35^{mm} и 36^{mm}. За тебе је то сасвим довољно.

Напомена: Кад би тражио од свог старијег друга из VI разреда да каже, колики је тај полупречник, он не би ништа цртао. Нешто би рачунао па би ти рекао: износи $r = 35^{mm}$, 72 .... Он би дакле „израчунао" чак на стоти део милиметра а ти знаш да онај знак .... казује да може ако хоће још тачније да израчуна. Зашто? *Зато што се помоћу три основна независна дела троугла могу сви они остали тачно израчунати. Између њих постоји* **тесна бројна веза**. Геометрија ће ти показати ту бројну везу.

125) **Цртање планова**. Сада можеш и ти да начиниш план једнога терена као што је план у чл. 104. Ради овако:

1) На хартији обележићеш .) А, пресек колосека АС и друма АВ. Помоћу пољског угломера одреди угао δ који колосек АС заклапа са правцем север-југ и угломером обележи на плану. У географији си научио, како ћеш одредити правац С.-Ј.

2) Да би нацртао троугао који граде колосек, друм и речица, потребно је да измериш три независна дела тога троугла. Најбоље је измерити све три странице. Али то није увек могуће, јер могу поједине тачке бити неприступне једна другој. Зато, ако се из А и С види В, измерићеш угломером α и γ. Нека је $\overline{AC} = 25^{km}$, $\alpha = 52^0$, $\gamma = 68^0$. Правцем АС одмерићеш $\overline{AC} = 25^{cm}$, дакле километар ћеш на плану претставити сантиметром; затим ћеш по $\overline{AC}$ пренети измерене углове без икакве промене — III осн. констр. — па си нацртао основни део плана. Остало је, такође, лако унети, као што ћеш доцније видети.

На овај начин ти можеш на хартији да решиш оне теренске задатке у чл. 112 и 116. Тако се *мора* радити ако се нема на расположењу равница, по којој би вршио мереља и преношења која су потребна за те задатке. Кад си нацртао тај смањени план терена, на њему можеш измерити штогод ти треба и знаш: 1) колики је угао на плану толики је и на терену; 2) свака дуж на плану својим сантиметрима показује километре у природи. Јасно ти је да, при нетачној конструкцији, свака

погрешка у 1^{mm} на плану, значи читавих 100^m у природи. Сада тек добро разумеш што ти је раније речено: При теренским вежбама 5—6 пута мери сваку величину да добијеш што тачнији план, па да, затим, при мерењу на плану добијеш што тачније вредности оних величина које ниси непосредно мерио.

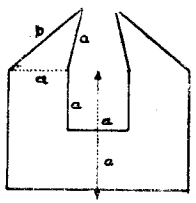
Напомена. У архитектури и у опште при украсима (на пр. код пиротских ћилимова) најчешће се јавља равнокрако тупоугли троугао („грчки"), при поплочавању ходника јавља се чешће равностранн, а витки равнокраки троугли (краци већи од основице) јављају се на т.зв. готским грађевинама.

126) Питања

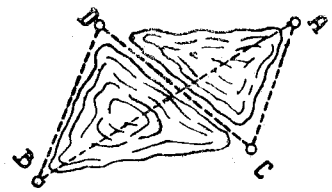
1. — Кад кажемо за два троугла да су подударна? — 2) Колико има врста подударности? — 3) Са колико је независних делова тачно одређен ма какав троугао? — 4) Свако правило подударности је теорема. Нађи оба дела и докажи коју било. — 5) Је ли тачно речено: троугао је тачно одређен са три основна дела? Кажи тачно ову теорему. — 6) У чему греши кад неко овако каже: два су троугла подударна кад имају по три странице? — 7) Који је троугао одређен само једним независним делом? — 8) Да ли је троугао одређен, кад му знаш сва три угла? — 9) Која је врста троуглова одређена са два независна дела? — 10) Побројко која два дела тачно одређују правоугли (равнокраки) троугао. — 11) Зашто су у геометрији врло важна правила о подударности троуглова? — 12) Шта је потсетна слика и чему служи? — 13) Зашто не можеш само рачуном да одредиш све остале делове троугла кад су ти позната три његова независна дела? Како их, засада, одређујеш и да ли ћеш добити потпуно тачне резултате? — 14) Да би могао одредити све остале делове, колико мораш знати независних делова у правоуглом троуглу, колико у равнокраком, а колико у равностраном или равнокрако правоуглом?

Вежбе и конструктивни задаци. — 1) Кад ти се зада да прецрташ на хартији нацртани троугао, на колико начина то можеш учинити? Који ти је најлакши и најбржи? — 2) Који је за земљомера најлакши начин да начини план тространог терена а који је тачнији? (Лакше је и брже мерити углове.) — 3) Пажљиво разгледај осно симетричну слику 63. Рашчлани је на теби познате слике па испитај са колико је независних делова тачно одређена. — 4) Нацртај правоугли Δ АВС (а је хипотенуза а h је висина која јој одговара): а) $c = 4^{cm}$, $\gamma = 75^0$ (или 100^0!).

б) $c = 25^{mm}$ и $h = 18^{mm}$. — в) $a = 5^{cm}$, $b = 25^{mm}$ (или $b = 6^{cm}$!). — г) $b = 17^{mm}$, $c = 35^{mm}$. — 5) Нацртај равнокраки Δ ABC ($a = b$ краци); а) $c = 5^{cm}$, $a = 7^{cm}$, б) $c = 4^{cm}$, $\alpha = 50^0$ (или $\alpha = 100^0$!); в) $c = 34^{mm}$, $h = 3^{cm}$ (цртај симетричну половину). — 6) Нацртај равнокрако правоугли Δ ABC чија је хипот. висина 3^{cm}. — 7) Нацртај равностранн Δ ABC чија је висина 3^{cm}. 8) Нацртај Δ ABC: а) $a = 4^{cm}$, $b = 3^{cm}$, $c = 45^{mm}$ (или $c = 8^{cm}$); б) $a = 32^{mm}$, $b = 18^{mm}$, $\beta = 31^0$ (или $\beta = 50^0$); в) $a = 24^{mm}$, $\alpha = 75^0$ и $\beta = 62^0$ (или $\beta = 120^0$!); г) $b = 3^{cm}$, $c = 4^{cm}$, $\gamma = 60^0$; д) $a = 2$, $c = 3$ (!); ђ) $a = 5^{cm}$, $b = 3^{cm}$, $c = 4^{cm}$ и $\alpha = 37^0$ (!). — 9) Колике су висине Δ ABC кад су му странице 3^{cm}, 4^{cm}, 5^{cm}? (Шта си приметио?). — 10) Колики је полупречник уписаног круга у Δ ABC кад је $a = 4^{cm}$, $b = 7^{cm}$, $\beta = 60^0$? — 11) Колики су углови правоуглог Δ ABC кад су катети 69^{mm} и 4^{cm}? — 12) Колико је површје правоугаоника, чије су димензије једнаке хипотенузи a и катету b правоуглог Δ ABC, кад је катет $c = 4^{cm}$ и $\gamma = 50^0$. — 13) Колика је запремина квадра чије су димензије тежиште линије Δ ABC са $a = 5^{cm}$, $b = 4^{cm}$, $c = 7^{cm}$. — 14) По једном старом запису благо је закопано километар далеко од храста а $1^{km},5$ од кестена; та два дрвета су удаљена 800^m. Начини план па одреди на колико места треба копати? Како би на терену помоћу угломера одредио положај та два места? — 15) Колико су на сл. 64 удаљена .) A и .) B, кад је мерењем нађено $\overline{AC} = 2^{km}$, $\overline{CD} = 3^{km},5$ $\overline{DB} = 3^{km}$, $\sphericalangle ACD = 70^0$ и $\sphericalangle CDB = 75^0$ (План!) — 16) Неко је ишао једним правцем 120^m, скренуо за 105^0 па ишао још 56^m. За колико мора поново скренути да се врати у полазну тачку? — 17) Неко иде правим друмом. У једном тренутку окрене главу за 30^0 па угледа торањ; после хода од 1^{km} мора окренути главу за 60^0 да би видео исти торањ. Колико је сада од њега удаљен?



Сл. — 63



Сл. — 64

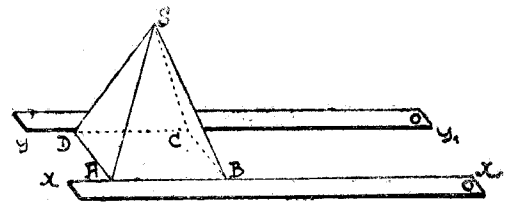
VI ТРАНСЛАЦИЈА ТЕЛА

127) И ове и прошле године научио си врло важне геометриске истине — теореме — посматрањем транслације равне слике у њеној равни.

Стави свој модел правилне четворостране пирамиде на сто, па уз две паралелне основне ивице $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ прислони ивице два права врстара и утврди их да се не могу померати.

Ивице тих врстара указују две паралелне праве XX_1 и YY_1 чији су делови паралелне дужи $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$. Пирамиду сада можеш померати по столу само тако да клизи између паралелних XX_1 и YY_1. Кад се тело тако креће да две његове паралелне дужи клизе по две паралелне праве (чији су део те дужи), кретање се назива *транслација тела* (сл. 65).

Такво је кретање воза на праволинискоме делу колосека, клипа у цилиндру парних машина, клипа у пумпи, поклопца у кутији за димне; такво кретање изводиш при отварању кутије са шибицама и т. д.



Сл. — 65

Ово тако просто и познато кретање упознаје те са важним геометриским истинама од којих ћеш само неке проучити ове године.

128) Наслони стаклену плочу на Δ SAB да га додирне. Плоча ти указује раван чији је део Δ SAB. Држи једном руком плочу да се не помера, а другом стави пирамиду у транслацију. Δ SAB клизи по својој равни, изводи транслацију правцем XX_1, док пирамидина основа изводи транслацију по столу. Теме пирамидино, S, остаје при томе увек на истој даљини од праве XX_1, дакле, описује палалелну праву са XX_1; ту паралелну може твој друг оцртати на плочи ако стави врх пера на пирамидино теме и помера га заједно са њим. То исто важи и за све остале тачке на Δ SAB. Како и YY_1 показује исти правац то и тачке на Δ SCD описују паралелне са YY_1 па, дакле, и са XX_1. И у опште то важи за све пирамидине тачке; све ће се оне померати по правима паралелним са XX_1. Ако си пирамиду померио за 2^{cm} и све ће њене тачке померити за 2^{cm}. Одакле закључујеш да при транслацији тела све његове тачке описују једнаке и паралелне дужи.

Дефиниција: Транслација тела је такво кретање, при ком све тачке његове описују паралелне и једнаке дужи.

129) Јасно ти је да, за све време померања пирамиде,

ма која њена тачка, на пр. врх пирамиде, остаје на истој даљини од пирамидине основе, дакле, и од равни по којој клизи основа. Према томе права коју описује врх пирамидин не може имати ни једне заједничке тачке са равни пирамидине основе па ма колико их продужили. Тај изузетни положај праве и равни назива се познатим називом, па се каже: права и раван су паралелне.

Дефиниција: Права и раван су паралелне ако се не секу ма колико их продужили.

Уклони стаклену плочу па на $\triangle SAD$ овлаш прилепи картон I, који ти указује раван троугла SAD; на њега наслони картон II, т.ј. доведи две равни, I и II, да се поклопе. Нека твој друг држи картон II да се не помера, а ти стави у транслацију пирамиду са картоном I на пр. за 5^{cm}. Све тачке картона I помериле су се за 5^{cm}, дакле, у овом положају картон I и II представљају две равни које се протежу без краја а немају ниједне заједничке тачке. Транслација тела ти открива да је доиста могућан и такав положај двеју равни да се не секу ма колико их продужили. Разумљиво ти је зашто се у геометрији за такве две равни каже да су паралелне.

Дефиниција: Две су равни паралелне ако се могу довести до поклапања транслацијом. Или

Две су равни паралелне ако се не секу ма колико их продужили.

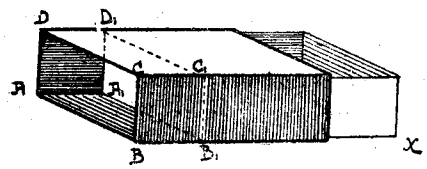
Покажи на коцки, квадру, у учионици, на свом прибору те важне изузетне положаје праве и равни и двеју равни.

130) Кад, притискујући прстом на правоугаоник ABCD, отвараш кутију шибица (сл. 66), ти стављаш у транслацију унутрашњи део правцем BX, који је нормалан на равни правоугаоника. При том померању раван правоугаоника поклапаће се по реду са свима равнима, које су паралелне са ABCD, дакле су и оне нормалне на правац BX. Кад правоугаоник доведеш у један паралелни положај, на пр. $A_1B_1C_1D_1$, ти видиш да су његове тачке A,B,C,D описале паралелне и једнаке дужи $\overline{AA_1} = \overline{BB_1} = \overline{CC_1} = \overline{DD_1}$, које су све нормалне на обе паралелне равни и показују најкраћи пут између тих равни.

1. — **Ако је једна права нормална на једној равни она мора бити нормална и на свакој равни која је с првом паралелна.**

2. — **Заједничке нормалне дужи између двеју паралелних равни једнаке су.**

Та заједничка нормална дуж између двеју паралелних равни показује најкраћу раздаљину између њих и назива се краће „раздаљина паралелних равни".



Сл. — 66

Сл. — 67

Ако преклопиш картон да ти показује две косе равни ти видиш: нити имају заједничке нормале, нити је иста даљина тачака једне равни од друге косе равни. Ту особину имају, дакле, само паралелне равни.

131) У суд са изрешетаним дном метни пластелина или кита, поравни површину и стави мању металну правоугаону плочицу. Снажним нормалним притиском стави плочицу у транслацију кроз пластелин (сл. 67). Хартијом покривени отисак у пластелину показује са свију страна ограничен простор, теби познато тело, *квадар*. Према томе јасно ти је зашто се каже: *Правоугаоник описује квадар при транслацији правцем нормалним на своју раван.*

Загледај отисак па кажи, шта описује при овој транслацији свака страница правоугаоника.

Сети се хармонике па ћеш још боље разумети, да квадар постаје транслацијом правоугаоника а правоугаоник транслацијом дужи. Којим правцем мораш изводити транслацију? Положи креду ивицом на таблу па изведи транслацију. Шта је описала ивица?

У III и IV разреду ово просто кретање тела много ће ти олакшати проучавање и разумевање геометриских теорема.

VII ПРИЗМА. — ПАРАЛЕЛОГРАМ

132) Кад упоредиш само по положају супротне странице било квадрата било правоугаоника, ти знаш да су паралелне. Зато их геометрија зове заједничким именом: *паралелограми.* (Значи: паралелне странице)

На моделу сл. 68 кад погледаш ма коју страну, на пр. ABA_1B_1, видиш да је свака ограничена са по две и две паралелне странице, зато ћемо и њих звати *паралелограми.*

Дефиниција: Паралелограм је равна слика ограничена са четири странице од којих су две и две супротне паралелне.

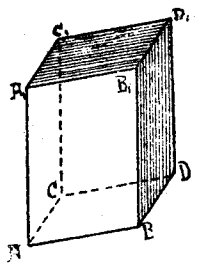
133) Ако водимо рачуна само о међусобном положају супротних страна код квадра и коцке, налазимо да је ма који пар супротних страна паралелан.

Отуда заједничко име за њих **паралелопипед** (паралелне површине). Модел на сл. 68 показује потпуно исту особину, дакле је и такво тело паралелопипед.

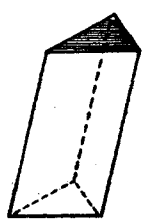
Дефиниција: Паралелопипед је тело ограничено са шест паралелограма, сваки супротни пар је паралелан.

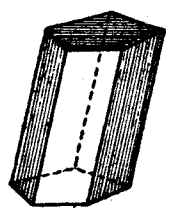
Ма која два супротна паралелограма који су подударни можемо сматрати за основе, јер паралелопипед можемо положити на сто ма којом страном. Остале четири заједно чине огртач паралелопипеда. Шта је омот а шта је запремина?

134) Ти знаш да се транслацијом паралелограма ABCD (сл. 68) правцем AA_1 он мора поклопити са $A_1B_1C_1D_1$



Сл. — 68





Сл. — 69

зато смемо рећи: *Паралелопипед постаје транслацијом паралелограма нормалним или косим правцем према његовој равни.*

135) Упореди моделе на сл. 69 ма са којим паралелопипедом у погледу основа и огртача. Ти видиш: 1) да су обе основе паралелне и подударне праволиниске слике, као и у паралелопипеда; 2) у сваком је огртач састављен из онолико паралелограма колико има страница у основи; дакле, и у погледу огртача слажу се са паралелопипедом. Због тога им геоиметрија даје заједничко име **призма.** (Стара грчка реч и значи тело добивено тестерисањем, јер кад се дрво истестерише, секиром од свакога дела добијаш отприлике таква тела, призме).

Дефиниција: Призма је тело ограничено са две подударне и паралелне праволиниске слике а са осталих страна паралелограмима. Тих паралелограма има колико има страница праволиниска слика.

Понови оглед из чл. 131 са металном плочицом као што је основа призми на сл. 69, па ти је јасна ова краћа дефиниција призме:

Призма постаје транслацијом праволиниске слике нормалним или косим правцем према равни слике.

136) **Речник призме.** — Те две паралелне и подударне праволиниске слике зовемо „основе"; „висина" је раздаљина тих паралелних основа; сви остали гранични паралелограми зову се „стране" и заједно чине призмин „огртач"; ивице горње и доње основе зову се „основне" а остале „бочне"; појединачно име призми дајеш према броју страна: тростране, четворостране, петостране и т. д. „Призма је права" ако су бочне ивице нормалне на основама, иначе је коса. Јасно ти је, јер ти то казује транслација, да су све бочне ивице паралелне и једнаке међу собом.

137) **П и т а њ а**

1) Које кретање тела називамо транслација? — 2) Какве линије описују поједине тачке тела при транслацији? — 3) Кад кажемо за две равни да су паралелне? — 4) Шта називамо раздаљином двеју паралелних равни? — 5) Зашто се квадрат и правоугаоник зову паралелограми? Шта значи та грчка реч? — 6) Какву слику описује дуж при транслацији? Кад ће описивати праву линију? — 7) Да ли су код сваког

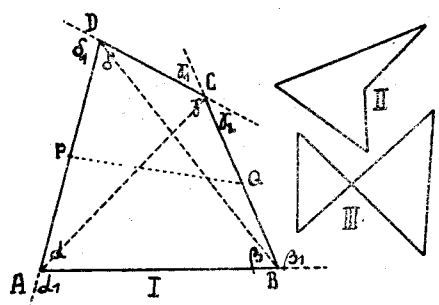
паралелограма суседне странице нормалне? — 8) Зашто се коцка и квадар зову заједничким именом паралепипед? Шта значи та грчка реч? — 9) Морају ли стране и основе паралелопипеда бити само квадрати и правоугаоници? — 10) По којој су особини паралелопипеди удружени са другим телима под заједничким називом: призма? Шта значи та грчка реч? 11) Кажи најкраћу дефиницију призме (транслација). 12) Ма на ком моделу призме „покажи" цео призмин речник. 13) Какве су бочне ивице ма у које призме? — 14) Да ли се код сваке призме може ма која гранична слика сматрати за основу? — 15) Код које призме можеш ма коју граничну слику сматрати за основу, према томе, колико она има различитих висина. — 16) Је ли тачно речено: транслацијом правоугаоника постаје квадар?

Вежбе и задаци. — 1) Кад ће дуж у транслацији описати квадрат т. ј. колико и којим се правцем мора померити? Покажи кредом. — 2) Кад ће квадрат при транслацији описати коцку? — 3) Да ли мора увек правоугаоник при транслацији да описује квадар? — 4) Какво је кретање игле у машини за шивење? — 5) У какво кретање ставља тестераш своју тестеру? — 6) Какво је кретање циркуларне тестере? — 7) Које кретање изводи коса у рукама вештог косача? — 8) Који делови машине за шивење изводе транслацију а који обртање? — 9) У колико си запазио, кажи, који делови локомотиве изводе транслацију а који ротацију? — 10) Ми се трудимо да у кретању наше тело остане вертикално т. ј. да положај нашега тела остане паралелан првобитном положају. Да ли је наше тело у транслацији? (Пази.) — 11) Гледај омот своје писаљке, осмостране призме. Покажи по две паралелне површине. Какве су међу собом по две неузастопне стране раздвојене једном страном, да ли се оне секу? — 12) Ако се две праве не секу, ти знаш: или су паралелне или се укрштају. Можеш ли тако исто казати и за две равни? — 13) Какво кретање изводиш кад хоћеш да „напумпаш" твој фудбал због кога губиш и сувише драгоценог времена за озбиљан рад? — 14 Кад „закључаваш" врата какво кретање изводи кључ а какво језичак? — 15) Какав је међусобни положај двеју хоризонталних равни? — 16) Која ти справа одмах показује раздаљину двеју хоризонталних равни (јер је конац њен заједничка нормала на обема). — 17) Да ли се може говорити о раздаљини косих равни? — 18) Је ли „шупљина" тело? Поклопи је. Дакле, тело је. — 19) Именуј неколико тела, које геометрија зове призма. — 20) Какво тело постаје транслацијом троугла? У ком случају неће описати тело? — 21 Правоугаоник $a = 4^{cm}$, $b = 3^{cm}$ извршио је транслацију $c = 5^{cm}$ нормалним правцем на своју раван. Колики је омот и запремина тела које је постало том транслацијом? — 22) Колику транслацију треба да изведе дуж $a = 4^{cm}$ нормалним правцем па да добијеш квадрат? Колики је полупречник описаног круга око тог квадрата. — 23) Колику транслацију треба да изврши дуж $a = 3^{cm}\ 2^{mm}$ нормалним правцем па да добијеш правоугаоник који су стари Грци сматрали за најлепши, а који се састоји из два квадрата? — 24) Којим правцем и колику треба извршити транслацију правоугаоника $a = 4^{cm}$, $b = 3^{cm}$ па да се добије квадар запремине $V = 24^{cm}$?

VIII ЧЕТВОРОУГЛИ

138) Погледај основу своје писаљке, осмостране или шестостране призме. Она ти показује равну слику ограничену са осам или шест страница. Посматрањем основа разних пирамида и призама наилази се на праволиниске слике, које нису ни паралелограми ни тространици. И при премеравању земљишта наилази се на такве слике. Дакле, треба се упознати са њиховим особинама. Проучићемо прво слике ограничене са 4 ма како положене странице, те се, природно, зову четвоространици. Сл. 70 показује да имају по 4 унутрашња угла. Зато се зову и четвороугли.

Дефиниција: **Четвроугао је равна слика ограничена са четири странице.** Разних су облика и јасно ти је, зашто се онај под I на слици 70 зове „испупчен", под II „удубљен" а под III „звездаст". Ми ћемо проучавати само *испупчене*.



Сл. — 70

Речник четвороугла је речник квадрата и правоугаоника, пошто су и то четвороугли. *Тетивом* се, као и код круга, назива свака дуж која спаја ма које две тачке обима; дијагонале d_1 и d_2 су тетиве које спајају по два неузастопна темена; средња линија је тетива која спаја средине супротних страница; бројне вредности страница бележиш са *a*, *b*, *c* и *d*.

Код сваког темена разликују се по два угла: један, на пр. δ, унутрашњи и један, ма који, његов упоредни, δ_1 или δ_2, јер су као унакрсни једнаки. Према томе разликујемо четири унутрашња α, β, γ, δ и четири спољашна α_1, β_1, γ_1 и δ_1.

139) Звездасти четвороугао ти показује да се ма какав четвороугао може рашчланити на два троугла. Испупчени ћеш рашчланити повлачењем ма које дијагонале. Тако добијаш саставне троугле, Δ ABD и Δ BCD, повлачењем дијагонале BD. Они ти показују, како ћеш лако дознати збир свих унутрашњих углова. Треба сабрати све унутрашње углове оба троугла, те добијаш: свега $180^0.2 = 360^0$.

Теорема: Збир унутрашњих углова четвороугла износи 360^0.

Пошто је сваки спољашњи, као упоредни, суплеменат унутрашњем, дакле заједно износе 180^0, то је збир свих спољашњих и свих унутрашњих $180^0 4 = 720^0$. Одби од тога збир унутрашњих, 360^0, па за збир спољашних добијаш $720^0 - 360^0 = 360^0$.

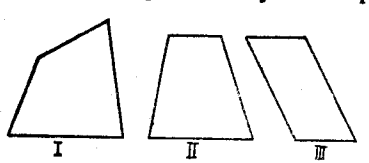
Теорема: Збир спољашних углова четвороугла износи 360^0.

Изведи обе ове теореме огледом; нацртај на хартији четвороугао па „отсеци" три унутрашња угла и послажи око четвртог, да добијеш њихов збир.

140) Према међусобном положају супротних страница четвороугли се деле у три главне групе:

1. — **Трапезоиди** су четвороугли који немају ни једног пара паралелних страница (сл. 71 I).

2. — **Трапези** су четвороугли у којих је само један пар супротних страница паралелан (сл. 71 II).



Сл. — 71

3. — **Паралелограми** су четвороугли, у којих су, као што већ знаш, по две и две супротне странице паралелне (сл. 71 III).

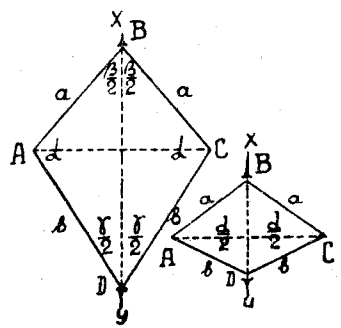
а ТРАПЕЗОИДИ

141) Они немају паралелних страница зато у трапезоидовом речнику *нема назива основица и висина.*

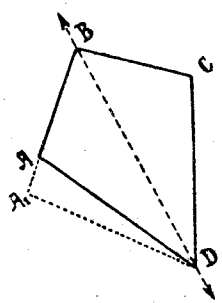
Делтоид. На важој слици 6 видиш један огледалски симетричан трапезоид CDOG који због своје симетричности добија нарочити назив *делтоид*. Слика ти казује: *Делтоид је четвороугао који нема паралелних страница али су по две суседне једнаке.* (Сл. 72). Ти видиш да је симетрала она дијагонала која спаја заједничка темена једнаких страница. По правилима осне симетрије она је симетрала друге дијагонале и симетрала углова чија темена спаја.

Пошто га симетрала дели на два подударна троугла ти закључујеш: *Делтоид је потпуно одређен са три независна своја дела.*

Друга дијагонала није симетрала, али га дели на два равнокрака троугла, те је отуда добио и име своје јер Δ је грчко велико писмено које се чита „делта". (Отуда и наше Д).



Сл. — 72



Сл. — 73

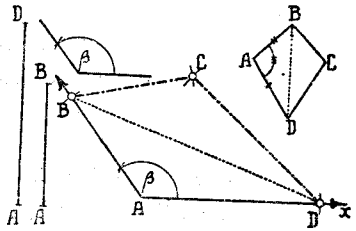
142) Ако ма и најмање повећаш једну страницу делтоида ABCD (сл. 73) ти добијаш трапезоид A_1BCD, па видиш:

Ма какав трапезоид је несиметрична слика. Ма која дијагонала на пр. BD дели га на два неподударна троугла Δ A_1BD и ΔBCD.

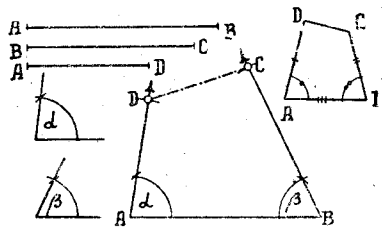
Лако је, према томе, видети са колико је независних делова одређен ма какав трапезоид. За Δ A_1BD мараш имати три независна дела. Чим њега нацрташ, ти већ знаш за ΔBCD страницу BD, те ти је за тај други троугао довољно да знаш још два његова дела. Дознао си правило: *Ма какав трапезоид тачно је одређен са пет својих независних делова.*

143) *Конструисати делтоид кад су дате две неједнаке странице и захваћени угао* β (сл. 74). На потсетној слици I видиш да је то прва основна конструкција Δ ADB, а кад њега конструишеш, лако ти је нацртати њему симетричан Δ BCD, дакле и делтоид ABCD. (Зашто, овако нацртан, делтоид не изгледа симетричан?)

144) *Конструисати трапезоид, кад су дате три странице* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ *и угли* α *и* β *на страници* $\overline{AB}$. Потсетна слика 75 казује да треба



Сл. — 74



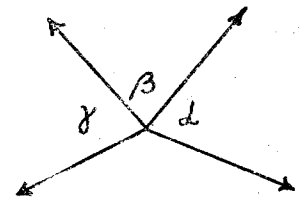
Сл. — 75

почети од троугла у коме имаш три основна дела на пр. од Δ ABD (I осн. констр.) Кад си га конструисао пренећеш преостале делове и то прво $\sphericalangle \beta$, па по његовом краку одмерити $\overline{BC}$ а тиме си конструисао трапезоид ABCD.

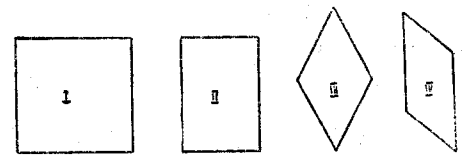
145) Питања

1) Шта називамо четвороуглом или четвороструником? — 2) Нацртај врстаром ма какав четвороугао па на њему, према његовом речнику, покажи поједине делове. — 3) На шта можеш рашчланити сваки четвороугао? — 4) Колики је збир унутрашњих, а колики спољашњих углова код четвороугла? — 5) Колико група четвороуглова разликујеш с обзиром на положај супротних страница? — 6) Који је трапезоид симетричан и како га зовеш? Кажи његове особине и зашто се тако зове. — 7) Са колико је независних делова делтоид потпуно одређен? — 8) Колико независних делова тачно одређују ма какав трапезоид? — 9) Рашчлани и докажи теорему: Збир унутрашњих углова четвороугла износи 360^0. — 10) Рашчлани и докажи теорему: делтоид је потпуно одређен са три независна основна дела. (Овде се претпоставка крије у називу слике). — 11) Шта је тетива четвороугла и која се тетива назива дијагоналом а која средњом линијом?

Вежбе и задаци. — 1) Кад ће дуж при транслацији описати праву, кос паралелограм, квадрат, правоугаоник. — 2) на сл. 76 α, β, δ су три узастопна унутрашња угла четвороугла: а) Видиш ли четврти? По чему знаш да је то? — б) Послужи се врстаром па покажи сва четири спољашња угла. — 3) Колико углова мораш знати у трапезоиду па да можеш израчунати остале. — 4) На сл. 70 I $\alpha = 54^0\ 20'\ 18''$ $\beta_1 = 122^0\ 20'\ 20''$, $\delta = 105^0$. Реши ове задатке: а) израчунај осталих пет углова; б) колики угао граде симетрале угла α и β? в) колики угао граде симетрале угла α и δ (те две симетрале са двема страницама граде четвороугао). — 5) У делтоиду сл. 72 I нека је $\alpha = 83^0\ 42'$, $\beta = 108^0\ 28'$: а) израчунај остале углове; б) колики су делови на које дијагонала дели α (нису једнаки али видиш правоугле троугле) г) са колико углова делтоидових можеш израчунати остале. — 6) Може ли у четвороуглу бити два права угла? — 7) Може ли бити два тупа и један прав? — 8) Како зовеш четвороугао чија су три угла права? — 9) Може ли трапезоид имати две или и више једнаких страница? Ако су све 4 једнаке, како га онда зовеш? — 10) У четвороуглу су два угла $\alpha = 75^0$, $\beta = 105^0$ налегла на страницу $\overline{AB} = 4^{cm}$, страница $BC = 3^{cm}$, $\delta = 90^0$. Колики је обим тога четвороугла. Цртај тачно да не буду велике погрешке. — 11) Нацртај делтоид чије су неједнаке странице $a = 3^{cm}$, $b = 5^{cm}$ а дијагонала симетрала $d_1 = 6^{cm}$. Кроз сва четири темена повуци паралелне према обема дијагоналама. Какву слику граде те паралелне праве и колико је њено површје? — 12) Постави на терену значкама четвороугао. Како ћеш нацртати план? (Дијагоналом га подели на троугле па ради по чл. 125).



Сл. — 76



Сл. — 77

6. ПАРАЛЕЛОГРАМИ

146) Слика 77 показује ти четири могуће врсте паралелограма, т.ј. четвороуглова чије су две и две супротне странице паралелне.

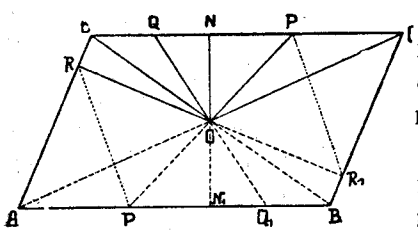
1) Добро ти је познат први, најправилнији међу њима: *квадрат, чије су све четири странице једнаке и сви углови прави.*

2) Познајеш и други неправилнији али лепши, *правоугаоник чија су сва четири угла права*, (отуд му име), *али само су супротне паралелне странице две и две једнаке.*

3) Трећи, витки паралелограм зове се *ромб.* Све су му странице једнаке али углови нису прави. (Обртањем тако изрезаног картона око дијагонале — помоћу орахове вртешке — видео би, место њега, једно тело које су Грци назвали ромбос — чигра. Отуда му долази назив). Потсећа те на делтоид, али је правилнији од њега.

4) Четврти паралелограм личи мало на ромб те су га назвали **ромбоид.** *Само су по две супротне и паралелне странице једнаке а углови нису прави.*

147) **Речник паралелограма** у главном ти је познат. Кад нацрташ ма који од њих, на пр. ромбоид као на слици 78, ти сматраш као да је положен на страницу $\overline{AB}$ те њу, и њој паралелну, зовемо основицама, а њихову раздаљину NN_1, „висином". Слика 77 показује да можеш и други пар паралелних страница сматрали за основицу те је (сл. 78) и њихова раздаљина RR_1, „висина" која том пару страница одговара. Ове исте називе „основица" и „висина" можеш употребити ма код ког паралелограма. Шта је тетива? Коју тетиву називаш дијагоналом а коју средњом линијом?



Сл. — 78

в. СРЕДИШНА (ЦЕНТРАЛНА) СИМЕТРИЈА

148) Међу свима паралелограмима најнеправилнији је ромбоид. Ипак ти око казује неку правилност у распореду његових делова иако си се уверио (чл. 40) да није осно симетричан. И око те не вара. Има и у њега једне симетрије али не осне. Једним простим огледом наћи ћеш и дознати врло просто правило те врсте симетрије по коме су распоређени ромбоидови делови. Повуци, као на слици 78, обе дијагонале и неколико тетива (NN_1 и RR_1, су раздаљине паралелних страница дакле „висине" ромбоидове); поклопи слику провидном хартијом; служећи се врстаром, тачно прецртај све што на слици видиш. Заболи чиоду у пресек

дијагонала, •) O, па изврши ротацију прецртане слике за 180°. Ти видиш да се прецрт потпуно поново поклопио са ромбоидом, само што су крајње тачке ма које тетиве повучене кроз •) O измењале места, *дакле је свака таква тетива тачно преполовљена пресеком дијагонала.* Твоје око је назрело овај правилни распоред тачака на периферији ромбоида: Свака тетива која пролази кроз пресек дијагонала показује ти по две тачке периферије подједнако удаљене од пресека O. Такав распоред тачака према једној истој тачки назива се *средишно (централно) симетричан,* та се тачка назива *средиште или центар симетрије* а сама слика *средишно симетрична слика.*

Дефиниција: Равна слика је средишно симетрична ако постоји једна тачка — средиште симетрије — која тачно полови сваку кроз њу повучену тетиву.

149) Пажљиво гледај ромбоид на слици 78 па ћеш потпуно разумети ова три основна и проста правила средишне симетрије:

I *Средиште полови сваку тетиву која кроз њега пролази* (на пр. ма коју дијагоналу или PP_1 . . .).

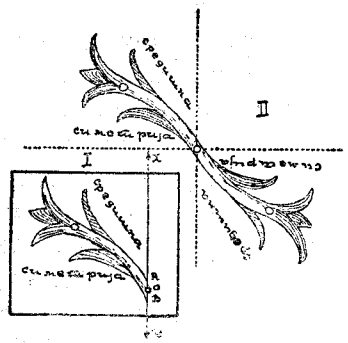
II *Свака тетива повучена кроз средиште симетрије полови слику на две непосредно подударне слике* (на пр. ма која дијагонала полови паралелограм на два непосредно подударна троугла а на пр. тетива PP_1 на два непосредно подударна четвороугла).

Ш *Свакој страници одговара паралелна и једнака страница.* (на пр. AB‖CD

Сва ова правила доказујеш простим обртањем провидне хартије за 180°.

150) Лако ти је сада нацртати средишно симетричну слику било по правилу I, било II. На пр. по II правилу радићеш овако (Сл. 79): Нацртаћеш праву XY, поклопити сјајном страном мањег парчета индиго хартије *па* ставити преко тога парче картона. (на картону си претходно повукао YX и обележио $\overline{AO} = \overline{OB}$). Оловком оцртај какву хоћеш слику лево од YX, утврди чиодом у •) O па изведи обрт за 180, т. ј. да тачке A и B измењају места, па још једном оцртај оловком по истој слици. Кад уклониш хартију за копирање видиш на хартији слику 79 II средишно симетричну. Натпис: „средишна симетрија" врло ти јасно говори о сва три правила средишне симетрије.

151) Јасно ти је да ти и средишна симетрија врло много може помоћи при проучавању особина једне слике. Али мора у истини бити сре-



Сл. — 79

дишно симетрична и ти то мораш пре свега несумњиво утврдити. Послужићеш се или провидном хартијом (II правило) или врстаром (I правило). Како? Доцније геометрија ће те упознати, како ћеш, без огледа, чистим размишљањем моћи утврдити да ли је слика средишно симетрична. Ти ниси ни приметио да си и ти баш све ово доказао размишљањем: применом правила подударности. Пажљиво прочитај чл. 122 па ћеш видети да је тако.

152) Нацртај на познати начин две слике: једну осно симетричну а другу средишно симетричну али тако, да су им леве половине непосредно подударне. Неће те изненадити што ти је лепша осно симетрична, јер тражиш своју симетрију, симетрију живога бића.

153) Тачно нацртај и посматрај правоугаоник. Он је као и сваки паралелограм средишно симетричан, али је исто тако и осно симетричан. И кад повучеш осу симетрије, она пролази кроз средиште симетрије, добијаш два дела који су и **обрнуто** и **непосредно** подударни и зато *леви део савршено може заменити десни део.* Ето сад разумеш зашто се код неке осно симетричне слике делови не могу заменити а код друге могу. Ти сад знаш: *чим се делови осно симетричне слике потпуно могу заменити, то значи да је она и средишно симетрична.*

Обрати пажњу на то, да се осно симетрична слика састоји из две *обрнуто подударне* слике а да се средишно симетрична слика састоји из две *непосредно подударне слике.*

Врло ћеш лако нацртати какву хоћеш слику која показује и средишну и осну симетрију: Поклопићеш хартију светлом страном хартије за копирање, преклопити обоје без гужвања тако да обична хартија буде споља, затим још једном да добијеш „на четворо" преклопљену хартију. Цртај на једној четвртини какву хоћеш шару која полази од једне преклопне ивице а завршава се на другој преклопној ивици, уцртај какве хоћеш шаре у њој. Кад је расклопиш добијаш лепу средишну и осно симетричну слику, преклопне ивице су две осе симетрије а њихов пресек центар симетрије. Ако, место на четворо, преклопиш хартију на осморо, пошто си претходно уметнуо хартију за копирање, па на осмини црташ какву хоћеш шару, онда кад расклопиш, налазиш симетричну слику са четири осе симетрије које се секу у средишту симетрије.

154) Питања

1) Колико има врста паралелограма и како се зову? — 2) Како гласи дефиниција паралелограма? — 3) Кад кажемо да је слика средишно симетрична? — 4) Јесу ли сви паралелограми средишно симетрични? — 5) Да ли сви паралелограми показују и осну симетрију? — 6) Како гласе правила средишне симетрије? — 7) Рашчлани и докажи прво правило средишне симетрије. — 8) Како ћеш цртати средишно симетричну слику? — 9) Како црташ осно симетричну слику? — 10) Како ти је најлакше нацртати и осно и средишно симетричну слику? — 11) Шта значи кад се половина осно симетричне слике може потпуно заменити другом половином? — 12) Је ли дуж средишно симетрична? А угао? — 13) Има ли ма који троугао средиште симетрије? Пази! Провери што си казао. — 14) Какву симетрију показује круг? — 15) Може ли бити средишно симетрична праволиниска слика а да нема једнаких и паралелних дужи (III правило средишне симетрије)?

Вежбе: 1) Из каквих се делова састоји осно и средишно симетрична слика? Да ли је сваки такав део симетричан и осно и средишно? (Као пример узми круг.) 2) Зашто нам се у већини случајева више свиђа осно него средишно симетрична слика? 3) Добро загледај слику 80, да ли је осно или средишно симетрична. (Вешто нацртана слика може те довести у забуну, али ти знаш правило по коме одмах познајеш да ли је осна или средишна симетрија). 4) Нацртај ма какав троугао, избери ван њега једну •) О, сваком темену нацртај према •) О средишно симетричну тачку. Какав троугао граде те три тачке? Тако положене две непосредно подударне слике зову се средишно симетричне слике. Какав је међусобни положај једнаких страница у та два троугла? 5) Нацртај равнострани троугао па, као у задатку 4, нацртај му средишно симетричну слику према центру његовом. Добићеш шестокраку звезду. Какву симетрију показује та звезда а какву само један троугао? 6) Сматрај редом свако теме квадрата као средиште симетрије па цртај квадрату сре-

дишно симетричну слику. 7) Нацртај праву и изабери на њој једну тачку. Како ћеш нацртати слику којој ће та права бити оса симетрије а та тачка центар симетрије? Јавља ли се још која оса симетрије? 8) Преклопи флис папир на осморо, па маказама изрежи како показују тачкасто назначене линије на сл. 81. Какву слику добијаш кад расклопиш хартију? — Преклопи хартију на 16,32.. па на сличан начин режи!

г. ОСОБИНЕ И КОНСТРУКЦИЈЕ ПАРАЛЕЛОГРАМА

155) Најнеправилнији паралелограм — ромбоид — показао ти је, да су сви паралелограми средишно симетрични и да средиште симетрије лежи у пресеку дијагонала. Према томе сви паралелограми имају заједничке особине које су везане за ову врсту симетрије.

1. — Средиште симетрије полови сваку тетиву која кроз њега пролази.

Последица: Дијагонале се полове.

2. — Свака тетива, повучена кроз средиште симетрије, дели паралелограм на две непосредно подударне слике.

Последица: Свака дијагонала дели паралелограм на два непосредно подударна троугла; супротне су странице једнаке.

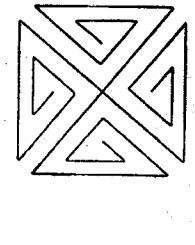
Видео си да *ромбоид* није осно симетричан (чл. 40). Дијагонале су му неједнаке и не стоје нормално једна на другој. Ромбоиду се не може ни описати ни уписати круг.

Остале врсте паралелограма имају поред средишне и осну симетрију, стога имају и нове посебне особине, којих нема ромбоид.

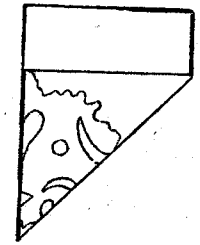
156) **Правоугаоник.** — Табак хартије, дописна карта... модел су правоугаоника. Ти га тачно преклапаш ма по којој средњој линији, дакле као што већ знаш (сл. 82):

Правоугаоник је осно симетрична слика. Симетрале су му средње линије.

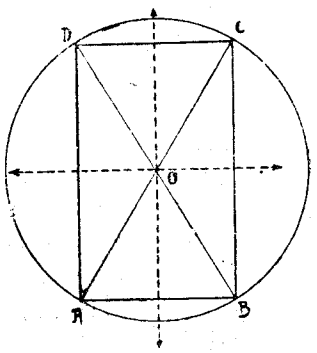
Кад га по обема симетралама преклопиш тачно на четворо, ти видиш да се половине обеју дијагонала поклапају, једнаке су. Према томе: Правоугаоникове дијагонале су једнаке, па како се и полове, око њега се може описати круг. Где је центар и колики је полупречник описаног круга?



Сл. — 80



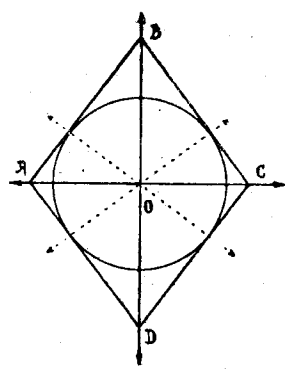
Сл. — 81



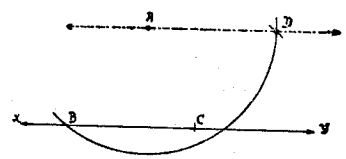
Сл. — 82

Напомена. — И без огледа доказаћеш да су дијагонале једнаке, ако умеш да докажеш да је Δ ABC ≅ Δ ABD. Покушај!

157) **Ромб.** — *Ромб* те потсећа на делтоид али је од њега правилнији, јер су му све четири странице једнаке. И без огледа ти је јасно да га можеш тачно преклопити по ма којој дијагонали (сл. 83). Јер на пр. •) B и •) D подједнако су удаљене од крајних тачака дијагонале AC а то значи, да је дијагонала BD симетрала дијагонале AC (и обратно). Стога, при обртању око BD пашће •) A на •) C а тада се и Δ ABD поклопио са Δ BCD. Провери огледом. Дакле



Сл. — 83



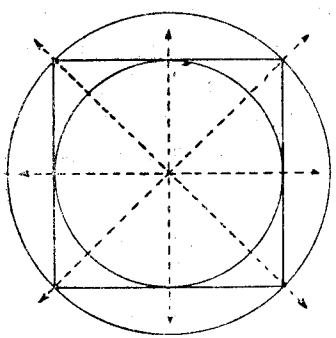
Сл. — 84

Ромб је осно симетрична слика. Симетрале су му обе дијагонале, али те дијагонале нису једнаке.

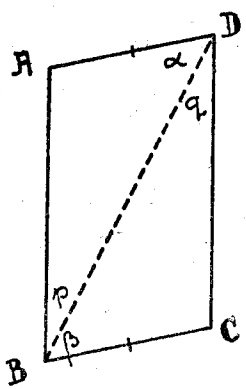
Последица: Свака дијагонала ромбова полови углове чија темена спаја; обе дијагонале се међусобно полове и нормалне су, те деле ромб на четири подударна правоугла троугла.

Пошто су ромбове дијагонале симетрале углова, то њихов пресек О мора имати једнаке нормалне даљине од кракова свих углова, дакле од све четири странице, стога *се у ромбу може уписати круг.*

Примена. — Кроз тачку А повући паралелну са правом XY (сл. 84). — Из тачке А описаћеш лук, који сече XY у В, истим отвором одмерићеш $\overline{BC}$, па не мењајући отвор, из •)С пресећи први описани лук у •) D. Тада је AD ‖ XY. Зашто?



Сл. — 85



Сл. — 86

158) **Квадрат.** — Као најправилнији паралелограм мора имати и све посебне особине правоугаоника и ромба: *Осно је симетричан* сл. 85). Симетрале су му и средње линије и дијагонале, које су једнаке, полове се и међусобно су нормалне. Због тога се *квадрату може и описати и уписати круг* са заједничким центром. Полупречник описаног круга је половина дијагонале, а уписанога половина странице.

159) Све особине паралелограма које си тако лако дознао по средишној симетрији њиховој и по осној симетрији неких од њих, могао си лако и чистим размишљањем дознати. Као упуство, како би размишљао, нека послужи овај задатак:

Доказати да је четвороугаоник паралелограм ако су му две супротне странице и паралелне и једнаке (сл. 86) на пр. $\overline{BC} = \overline{AD}$ ***и*** $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.

Јасно видиш у овој *теореми* и претпоставку и закључак. Треба, дакле, доказати да су оне две супротне странице AB и CD такође паралелне т. ј. да оне са дијагоналом BD граде једнаке наизменичне углове $\sphericalangle$ p и $\sphericalangle$ q. Па јесу ли једнаки?

Посматраш Δ ABD и Δ BCD па пишеш

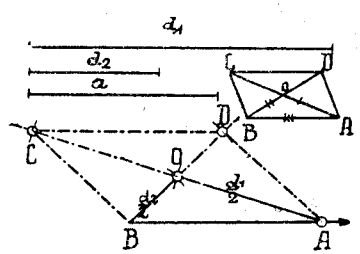
I знам да је	II Као супротан пар мора бити:
$\overline{DB} = \overline{DB}$ као заједничка страница	. . . $\sphericalangle A = \sphericalangle C$
$\overline{AD} = \overline{CB}$ јер је то услов . .	. . . $\sphericalangle p = \sphericalangle q$
$\alpha = \beta$ јер је по услову AD ‖ CB	. . . $\overline{AB} = \overline{CD}$
Дакле по I правилу подударн. Δ ABD ≅ Δ BCD	Доказао сам да је AB ‖ CD, пошто са BD граде једнаке, наизменично положене углове, $\sphericalangle p = \sphericalangle q$. Дакле је ABCD доиста паралелограм.

И овога пута видиш да то није тешко, али сваки овакав начин доказивања захтева да запамтиш и добро разумеш раније научене теореме.

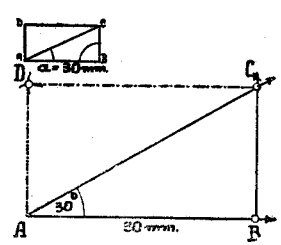
160) *Конструкција ромбоида.* — Ма која дијагонала дели ромбоид на два подударна троугла. Довољно је дакле нацртати један, а за то ти је потребно три независна његова дела:

Ромбоид је потпуно одређен са своја три независна дела.

Пример: Конструисати ромбоид кад су познате обе дијагонале d_1 d_2 и страница *a* (слика 87). — На потсетној слици ти видиш, с обзиром на то да се дијагонале полове, да су у Δ ABO дате све три странице $\overline{AB} = a$ $\overline{AO}$ и $\overline{BO}$ су половине дијагонала. То је друга основна конструкција. Кад си конструисао Δ ABO продужићеш $\overline{AO}$ за сопствену дужину, а тако исто $\overline{OB}$, па си добио темена C и D па тиме конструисао ромбоид.



Сл. — 87



Сл. — 88

161) *Конструкција правоугаоника.* — Дијагонала дели правоугаоник на два подударна правоугла троугла. Дакле, довољно ти је да нацрташ један, а за то ти је потребно два независна дела.

Правоугаоник је тачно одређен са два независна дела.

Пример: — Конструисати правоугаоник кад му је једна страница $a = 3^{cm}$ а угао који она заклапа са дијагоналом 30^0. —

Потсетна слика 88 показује да се задатак своди на конструкцију правоуглог ΔABC у ком знаш катет $AB = 3^{cm}$ и оба налегла угла од 30^0 и 90^0. Дакле трећа основна конструкција. Лако ти је сада шестаром одредити .) D јер је $\overline{CD} = \overline{AB}$ а $\overline{AD} = \overline{CB}$.

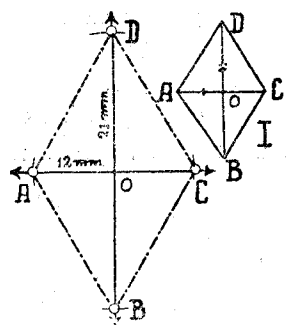
162) *Конструкција ромба.* — Осна симетрија ромбова нам је показала да дијагонала дели ромб на два подударна равнокрака троугла:

Ромб је потпуно одређен са два независна дела.

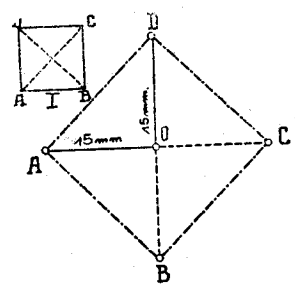
Примери: Конструисати ромб кад су му дијагонале $d_1 = 42^{mm}$, $d_2 = 24^{mm}$. Потсетна слика 89 I ти казује: Нацртај правоугли ΔAOD, кад му знаш оба катета који су половине дијагонала, дакле $\overline{AO} = 12^{mm}$, $\overline{DO} = 21^{mm}$. Задатак је сведен на прву конструкцију, јер знаш две странице и захваћени угао 90^0. Кад га конструишеш, продужићеш сваки катет за сопствену дужину и добити темена B и C а тиме и ромб.

163) Квадрат је очевидно одређен само једном својом дужином.

Пример: Конструисати квадрат, чија је дијагонала $d = 3^{cm}$. — Из потсетне сл. 90-I видиш да треба конструисати равнокрако правоугли ΔAOD, чији су катети по 15^{mm}. Зашто? — Задатак је исти као у чл. 162. (Овако нацртан квадрат изгледа много лепше. Зашто?)



Сл. — 89



Сл. — 90

164) Питања

1. — Коју симетрију мора имати сваки паралелограм? — 2.) Које су заједничке особине свих паралелограма? — 3.) Који паралелограми имају и осну симетрију? — 4) У вези са дијагоналом кажи све посебне особине правоугаоника (ромба, квадрата). — 5) Нађи оба дела и покушај да размишљањем докажеш теорему: четвороугао чије се дијагонале полове мора бити паралелограм. — 6) Колико врста различитих углова има ромбоид (ромб) и какве су везе између њих? — 7) Са колико је независних делова одређен ромбоид (ромб, правоугаоник, квадрат)? — 8) Има ли паралелограм висина?

Вежбе. — 1) У којих су паралелограма средње линије симетрале? Шта знаш за њихове дијагонале? — 2) У којих су паралелограма дијагонале симетрале? Шта знаш о дијагоналама? — 3) Може ли се сваком паралелограму описати или уписати круг? — 4) Има ли паралелограма са 4 симетрале? — 5) Нацртај правоугли троугао па помоћу правила о дијагоналама у правоугаонику, докажи да је центар описаног круга средина хипотенузе. — 6) Помоћу метра на зглобове покажи све врсте паралелограма и покажи особине сваког посебице. — 7) Кад од метра на зглобове направиш квадрат па затим „развлачиш", какве слике добијаш; шта бива са обимом а шта са површјем? — 8) Јели тачно речено: ромб је развучен квадрат а ромбоид је развучени правоугаоник? (Нацртај квадрат, па развлачи!) — 9) Који паралелограм има две врсте основица и висина? — 10) У ком је паралелограму висина једнака другој страници, а у ком су обе висине једнаке? — 11) Може ли ромбоид имати исте углове као и ромб? — 12) Нацртај ма какав ромбоид (ромб) па повуци симетрале два унутрашња угла на истој страници. Какав угао видиш између симетрала. Провери угломером и покушај да размишљањем утврдиш да тако мора бити и код свих паралелограма (види 6 питање). — 13) Какву слику граде симетрале сва 4 унутрашња угла паралелограмова? (Види зад. 12)

Задаци. — 1) У ромбоида је $\alpha = 112^0 40'$; израчунај све остале углове. — 2) У ромба је $\alpha = 52^0$; колики угао граде дијагонале са страницама? (Да ли би то могао решити и код ромбоида?!!) — 3) Нацртај ромб (a је страница, d_1 и d_2 су дијагонале): а) $a = 35^{mm}$, $\alpha = 60^0$; б) $d_1 = 3^{cm}$, обим 76^{mm}; в) $d_1 = 3^{cm}$, $\alpha = 75^0$ или 200^0); г) $a = 4^{cm}$, $d_1 = 5^{cm}$ и $d_2 = 7^{cm}$ (!). — 4) Нацртај правоугаоник (a и b су странице, d је дијагонала α је угао дијагонале са страницом): а) $a = 32^{mm}$, $b = 12^{mm}$; б) $a = 3^{cm}$, обим 10^{cm}; в) $a = 32^{mm}$, $d = 45^{mm}$ (или 25^{mm}!) г) $d = 5^{cm}$, $\alpha = 32^0$. — 5) Нацртај ромбоид (a и b су странице, d_1 и d_2 су дијагонале, α угао ромбоида): а) $a = 37^{mm}$, $b = 25^{mm}$ и $\alpha = 120^0$; б) $a = 25^{mm}$, $\alpha = 60^0$, $d_1 = 35^{mm}$ (ако је $d_1 = 20^{mm}$ колико има решења?); в) $d_1 = 4^{cm}$, $d_2 = 5^{cm}$ и захваћени угао 135^0; г) Обим 10^{cm}, $a = 2^{cm}$, $d_2 = 4^{cm}$; д) $a = 3^{cm}$, $\alpha = 45^0$(!); ђ) $a = 5^{cm}$, $b = 4^{cm}$, $d_1 = 3^{cm}$ и $d_2 = 7^{cm}$(?) 6) Колико је површје квадрата, чији је полупречник описаног круга 57^{mm}? — 7) Нацртај ромб $d_1 = 5^{cm}$, $d_2 = 4^{cm}$. Средине страница

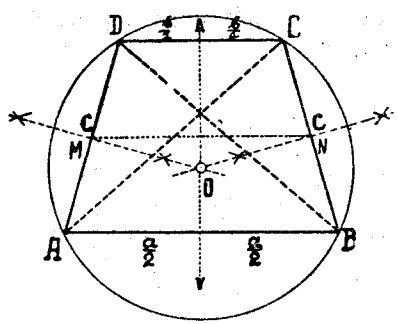
су темена једнога четвороугла. Провери шта ти око о њему каже па му израчунај површје. (5cm² ако си тачно цртао и мерио.). — 8) Колики је омот и запремина квадра чије су димензије једнаке са дијагоналама и већом страницом ромбоида $a = 4^{cm}$, $d = 6^{cm}$ и угао према тој дијагонали 60°? — 9) Колики је огртач призме која постаје кад се ромб $a = 4^{cm}$, $\alpha = 60^0$ транслаторно помери за дужину мање дијагонале а правцем нормалним на своју раван?

Напомена. Резултати које си добио у зад. 6, 7, 8, 9 неће се потпуно слагати са резултатима твојих другова. И при цртању и при мереју на нацртаној слици грешио си. Не могу се те грешке сасвим избећи, али баш зато треба што пажљивије цртати и мерити, па да грешке буду што мање.

д. ТРАПЕЗИ

165) *Речник трапеза.* (И ми кажемо по неки пут трпеза место сто; Грци су своје столове правили и у том облику.) Непаралелне странице зовемо *крацима;* паралелне странице су *основице* а њихова раздаљина је трапезова *висина;* кад се код трапеза каже средња линија мисли се на *средњу линију MN* која спаја средине кракова (сл. 91).

Расклопи свој модел сл. 6. Ти видиш неколико трапеза. Симетрија ти каже да су у трапезу ААСЭ краци једнаки, те му је име *равнокраки* трапез; трапез АКСЭ има неједнаке краке те разумеш зашто га зову *разнокраки;* у разнокраком трапезу АНЕС један је крак нормалан на паралелним страницама, те отуд назив *правоугли* трапез (тај крак је у исти мах и висина трапеза).



Сл. — 91

Осна симетрија на сл. 6 јасно ти говори:

1. — Од свих трапеза једино је равнокраки трапез осно симетричан. Само су у њега, према томе, дијагонале једнаке али се не полове; само су у њега једнаки углови који леже на истој паралелној страници; зато чим му знаш један угао, умеш лако да одредиш и све остале; симетрале кракова секу се на симетрали трапезовој, јер кад је преклопљен картон, са индиго хартијом, ти једним потезом црташ обе те симетрале. Према томе само равнокраком трапезу може се описати круг.

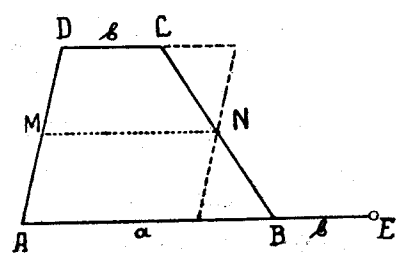
Али и тај најправилнији, равнокраки, трапез није средишно симетричан, јер једнаке странице нису паралелне а паралелне нису једнаке. А ти знаш да средишну симетрију имају оне праволиниске слике у којих су по две странице и паралелне и једнаке (као код паралелограма).

2. — Све остале врсте трапеза, пошто су разнокраки, не могу бити симетрични, те немају ниједне од побројаних особина равнокраког трапеза. За њих мораш знати два независна угла па да можеш остале одредити. Дијагонале им нису једнаке, нити им се може описати круг.

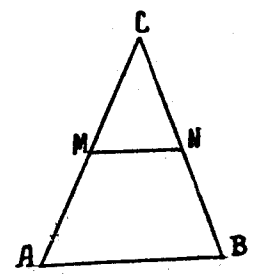
176) Кад ма у каквом трапезу одмериш (сл. 92) $\overline{BE} = \overline{CD}$ добио си збир паралелних страница $\overline{AE}$. Шестар ће ти показати да тај збир садржи тачно два пута средњу линију MN. Служећи се са два врстара, ти можеш на познати начин, транслацијом тространог врстара, доказати да је $MN \parallel AB \parallel CD$.

Теорема: Средња линија трапезова паралелна је паралелним страницама и износи тачно половину њиховог збира.

Напомена. — Продужи на сл. 92 $\overline{CD}$ па из .) N повуци паралелну са $\overline{AD}$. добићеш паралелограм. Ако си добро научио и разумео правила



Сл. — 92



Сл. — 93

о паралелограму, могао би и размишљањем доказати ову теорему.

168) Ти знаш да кроз .) M можеш према правој $\overline{AB}$ повући само једну паралелну и да то мора онда бити баш MN. Зато је јасна:

Обрнута теорема: Права која полови један крак а паралелна је са паралелним страницама мора половити и други крак, дакле је средња линија.

169) Кад црташ трапез са све мањом страницом $\overline{CD}$, ти видиш да ћеш на крају добити, место трапеза, Δ ABC, па ти је јасно, као и код трапеза: (сл. 93).

Теорема: Дуж која спаја средине двеју страница троуглових паралелна је са трећом страницом и њена је половина.

Ту дуж називамо средњом линијом троугла.

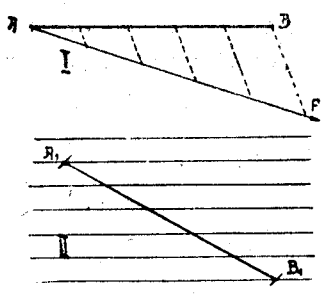
Обратно: Права која полови једну троуглову страницу а паралелна је с другом мора половити трећу страницу.

Провери све то шестаром и са два тространа врстара.

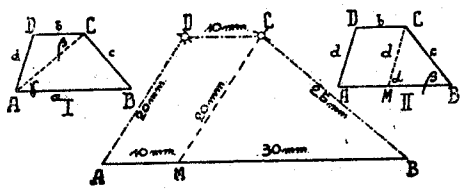
170) Сад можеш лако поделити дуж AB на колико било једнаких делова, на пр. **на пет (сл. 94).**

I начин. — Из тачке A повуци произвољно зрак AX па по њему ма каквим отвором шестара одмери 5 једнаких делова. Састави P са B па из осталих добивених тачака повлачи паралелне праве са PB, те делиш $\overline{AB}$ на 5 једнаких делова, примењујући правило о средњој линији трапеза и троугла. (Покажи на сл. 94 по реду те средње линије и примењуј обрнуте теореме из чл. 168 и 169).

II начин. — Помоћу хартије са паралелним подједнако удаљеним линијама на пр. на вежбанци (сл. 94-II). Отвором AB из .) A_1, коју бираш на једној од тих линија, сечеш шесту паралелну у .) B_1 па је A_1B_1 подељено тим паралелним на 5 једнаких делова. (Зашто?) Један такав део $\overline{AM}$ узми у шестар па ћеш га тачно 5 пута пренети по $\overline{AB}$.



Сл — 94



Сл. — 95

171) *Конструкција разнокраког трапеза.* — Треба га рашчланити на слике које умеш да нацрташ. На потсетној сл. 95 I, подељен је дијагоналом на два неподударна троугла. На потсетној сл. 95 II повучено је MC ∥ DA те је подељен на паралелограм AMCD и Δ MBC. Како је MC ∥ AD, ти знаш да мора бити $\overline{MC} = \overline{DA}$, ∢BMC = α (сагласни) и $\overline{AM} = \overline{DC}$, те је MB разлика паралелних страница. Потсетном сл. 95 II служићеш се кад су дате обе паралелне странице, јер тада у Δ MBC знаш $\overline{MB}$ као разлику њихову.

Потсетна сл. 95-I казује: да нацрташ Δ ABC, потребно ти је три независна дела. Чим њега нацрташ, за Δ ACD добио си страницу $\overline{AC}$ и ∢$\beta = \gamma$ (наизменични); дакле, треба само још један део на пр. $\overline{AD}$ да доцрташ трапез. *Разнокраки трапез потпуно је одређен са четири своја независна дела.*

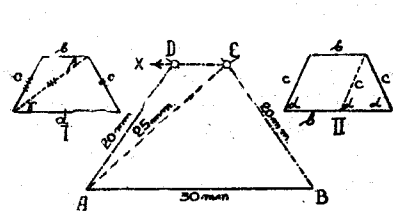
Пример: Конструисати трапез, кад су дате све 4 странице, на пр. $\overline{AB} = 4^{cm}$ $\overline{AD} = 2^{cm},5$, $\overline{BC} = 2^{cm}$, $\overline{CD} = 1^{cm}$. Дате су обе паралелне, зато гледаш потсетну сл. 95. II која показује, да је лако нацртати Δ MBC, пошто му знаш све три странице; $\overline{MC} = 2^{cm},5$ $\overline{BC} = 2^{cm}$ и $\overline{MB} = 4-1 = 3^{cm}$. (II осн. констр.) Затим ћеш одмерити $\overline{MA} = 1^{cm}$, добити .) A. Како ћеш сада добити .) D?

172) Равнокраки трапез. — Потсетна сл. 96. I показује: чим си нацртао Δ ABC, зато ти је потребно три независна дела, ти имаш одмах три независна дела за Δ ACD, јер имаш страницу $\overline{AC}$, ∢$\beta = \gamma$ (наизменични) и AD = BC. Према томе: *равнокраки трапез је потпуно одређен са своја три независна дела.*

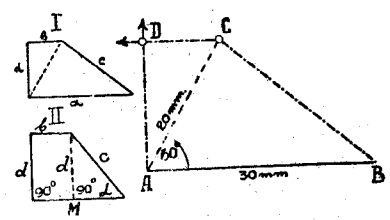
Пример: Конструисати равнокраки трапез $\overline{AC} = 25^{mm}$, $\overline{AB} = 30^{mm}$ и $\overline{BC} = 2^{cm}$. Потсетна сл. 96. I ти показује: лако ти је конструисати Δ ABC јер му знаш све три странице. Четврто теме добијаш, кад из .) C повучеш CX ∥ AB, па је из .) A пресечеш отвором $\overline{AD} = \overline{BC} = 2^{cm}$.

173) Правоугли трапез. — Потсетна сл. 97 I упућује: кад нацрташ Δ ABC, а зато ти је потребно три независна дела, теме D добићеш у пресеку CX ∥ AB и AY ⊥ AB, дакле ти није потребан ни један део више. Закључујеш: *Правоугли трапез је одређен са три независна дела.*

Пример: Конструисати правоугли трапез кад је $\overline{AB} = 3^{cm}$, $\overline{AC} = 2^{cm}$ и $\beta = 60^0$. Потсетна сл. 97 I указује на Δ ABC, у ком знаш две странице и захваћени угао (II осн. констр.). Како ћеш, затим, одредити и четврто теме?



Сл. — 96



Сл. — 97

174) **П и т а њ а**

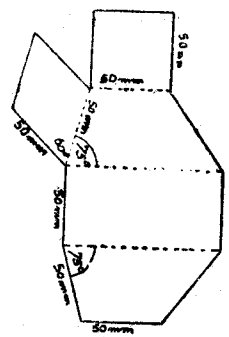
1) Шта називамо трапезом и како је добио име? — 2) Нацртај разнокраки трапез $\overline{AB} = 5^{cm}$, $\overline{CD} = 2^{cm}$, $\alpha = 60^0$ и $\beta = 72^0$ (први угао цртај шестаром, и сети се да су дате обе

паралелне стране). На том трапезу понови његов речник. — 3) Колико различитих висина има трапез, има ли једнаких? (Пази!). — 4) Колико има врста трапеза? — 5) Који је трапез осно симетричан? — Кажи његове особине по сл. 6. — 6) Може ли трапез бити средишно симетричан? (Ти знаш правило да таква слика мора имати парове паралелних једнаких страница). — 7) Шта називамо средњом линијом трапеза и какве су њене особине? — 8) Колико има троугао средњих линија и какве су им особине? — 9) Како се конструктивно дели дуж на колико било једнаких делова? — 10) Са колико је независних делова тачно одређен разнокраки трапез? — 11) Који су трапези тачно одређени са три независна дела? — 12) Шта значи: равнокраки трапез је тачно одређен са три независна дела? (Пажљиво прочитаі још једанпут чл. 124).

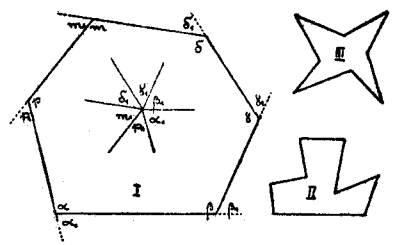
Вежбе. — 1) Колике су средње линије ΔABC, кад је $a = 5^{cm}$, $b = 4^{cm}$, $c = 45^{mm}$? — 2) Нацртај ΔABC, па му повуци све три средње линије. Какви су међу собом добивена 4 троугла (казаће ти паралелограми); провери провидном хартијом; ако су $\alpha = 50^0$, $\beta = 60^0$ два угла у ΔABC, колики су углови у та 4 троугла? — 3) У трапезоиду су средине страница темена једног паралелограма. Зашто? (Повуци једну дијагоналу, па примени правило о средњој линији троугла. То исто понови повлачењем и друге дијагонале). — 4) Нацртај разнокраки трапез па измери угао између симетрала унутрашњих углова на ком било краку. Зашто баш толико? (Паралелне праве!). — 5) У равнокраком трапезу један унутр. угао је $112^030'$; колики угао граде међу собом симетрале оба угла на већој паралелној страници? — 6) Како треба положити дуж (на пр. писаљку, ивицу хартије) на изврстану („шпартану") хартију па да је поделиш одмах на 7 једнаких делова? — 7) Наведи примере из живота, где видиш примењене четвороугле (њиве, ходници, ограда поред степеница, паркет...). Дај по један пример за сваку врсту четвороугла! Коју врсту најчешће виђаш?

Конструктивни задаци, (a и b су паралелне странице, c и d краци, d_1 и d_2 дијагонале, α и β угли на већој паралелној страници): — 1) Нацртај равнокраки трапез: а) $a = 6^{cm}$, $c = 35^{mm}$, $\alpha = 52^0$; б) $a = 62^{mm}$, $c = 4^{cm}$; $d_1 = 57^{mm}$; в) $c = 38^{mm}$, $d_1 = 6^{cm}$, $\alpha = 60^0$; г) $a = 58^{mm}$, $b = 3^{cm}$, $\alpha = 68^0$ — 2) Колики су углови и висина равнокраког трапеза $a = 5^{cm}$, $b = 2^{cm}$, $c = 3^{cm}$? — 3) Нацртај правоугли трапез: а) $a = 57^{mm}$, коси крак $c = 52^{mm}$, $d_1 = 49^{mm}$; б) $a = 54^{mm}$, $h = 4^{cm}$, $b = 25^{mm}$; в) одредити обим кад је $a = 4^{cm}$, $b = 2^{cm}$, $\alpha = 45^0$. — 4) Нацртај разнокраки трапез: а) $a = 7^{cm}$, $c = 5^{cm}$, $d_1 = 6^{cm}$, $d_2 = 68^{mm}$; б) $a = 6^{cm}$, $c = 45^{mm}$, $\alpha = 75^0$, $\beta = 60^0$; в) $d_1 = 65^{mm}$, $d_2 = 57^{mm}$, $a = 62^{mm}$, $\alpha = 72^0$; г) $a = 6^{cm}$, $b = 31^{mm}$, $\alpha = 60^0$, $\beta = 70^0$; д) $a = 52^{mm}$, $b = 3^{cm}$, $c = 4^{cm}$, $d = 38^{mm}$; ђ) одреди углове, висину и обим кад је $a = 72^{mm}$, $b = 4^{cm}$, $c = 5^{cm}$, $d_1 = 68^{mm}$; е) $a = 5^{cm}$, $b = 2^{cm}$, $c = 3^{cm}$, $d = 35^{mm}$, $d_1 = 45^{mm}$ (Пази.). — 5) Подели 5^{cm} на 7 једнаких делова. — 6) Како ћеш добити три седмине дате дужи?

176) Мрежа косе призме. — На сл. 98 видиш како ћеш начинити мрежу четворостране косе призме. Нацртај на картону тачно према подацима које ти даје сл. 98. Недостаје само једна страна. Изрежи по обиму и преклопи по тачкасто обележеним линијама; склопи на познати начин. Добићеш призму чије су основе трапези а странице све врсте паралелограма. Недостаје т. ј. отворена је само с једне стране где треба да буде ромбоид. Није тешко да га доцрташ и прилепиш наслонивши модел на хартију тим отвореним делом. (Оштар угао ромбоида је око 66^0). Начини још један модел по истој мрежи али савијај у супротном смеру. Какве су такве две призме?



Сл. — 98



Сл. — 99

IX МНОГОУГЛИ

177) **Речник.** Кад се каже многоугао **(вишестраник)** обично мислимо на *равну слику ограничену са више од четири дужи — странице*. Посебно име сваком даћеш према броју страница, на пр., петоугао, стоугао... Речник четвороугла и овде употребљујеш, на пр. *дијагонала* и овде значи дуж која спаја два која било неузастопна темена. Исти значај имају речи *унутрашњи и спољашњи угао* итд. *У речнику многоугла нема речи основица и висина.* Ти видиш: колико има темена толико има страница, спољашњих углова, унутрашњих углова. По облику свога обима врло су разнолики и јасно ти је зашто се онај осмоугао на сл. 99 I зове *„испупчен"*, на сл. II *„удубљен"*, а удубљени на сл. III, природно, зовеш *„звездасти"*. Кад по-

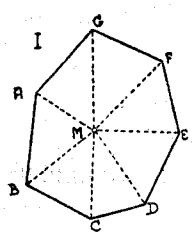
гледаш сл. III, јасно ти је зашто не можеш говорити ни о основици ни о висини.

178) **Проучићемо само испупчене многоугле. Најлакше** *их је при томе проучити кад их рашчланиш на саставне троугле. То можеш* учинити на два начина: 1) Можеш узети коју било •) M у унутрашњости па саставити са свима теменима (сл. 100 I) те добијаш толико троуглова колико има страница (темена) — 2) Ако бираш •) M све ближе ка темену A ти видиш да два троугла постају све мања и мања. (Која?). Дакле, кад место •) M узмеш баш само теме A, два се троугла губе (који)? према томе *многоугао можеш рашчланити повлачењем дијагонала из једног темена и број троуглова за два је мањи од броја темена.*

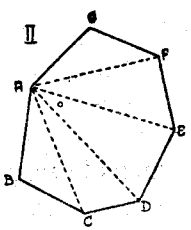
179) Прилично би те збунило питање: колико свега дијагонала има стоугао. Треба размислити а не нагађати. И ти размишљаш овако:

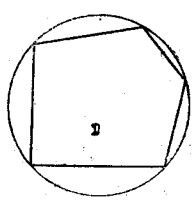
1) Слика 100 II казује: број дијагонала, повучених ма из кога темена за 3 је мањи од броја темена, јер теме из кога повлачим дијагонале, на пр. A, и два суседна, B и C, не дају дијагонале. Дакле из једнога темена може се повући $100 - 3 = 97$ дијагонала.

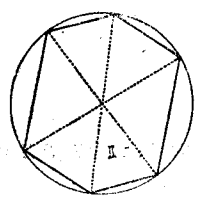
2) Тај ћу број помножити са бројем свих темена, добијам 100.97. Да ли тај производ казује број свих дијагонала? — Не! Јер ја видим да сам сваку дијагоналу два пут урачунао, на пр. EG, кад сам је повлачио из •) E и GE (исту дијагоналу), кад је будем повлачио из •) G. Дакле број дијагонала је половина нађеног производа. Према томе стоугао има $97.100 : 2 = 4850$ дијагонала. — Одатле



Сл. — 100







Сл. — 101

Теорема: *Број многоуглових дијагонала је половина производа броја свих темена и броја за три мањег.*

180) И не помишљаш да се послужиш угломером па да дознаш колики је збир свих 100 унутрашњих углова стоугла, јер си *већ* код четвороугла *приметио* како је лакше радити (чл. 139). Поделићеш га на троугле повлачењем дијагонала из једног темена и знаш да си добио за два мање троуглова него што има темена, па како је збир унутрашњих углова у сваком троуглу 180^0, јасна је

Теорема: *Збир свих унутрашњих углова многоуглових је производ из 180 и броја који је за два мањи од броја темена.*

Дакле у стоуглу је тај збир $180.98 = 17640^0$.

И да си покушао да црташ и мериш, ти знаш зашто не би могао тачно наћи овај број.

181) Збир свих спољашњих углова дознајеш посматрањем слике 99 I. Нацртаћеш ма какав многоугао, па ћеш из које било •) M повлачити по реду паралелне са сваком страницом. Сећаш се правила о угловима са крацима паралелним у истом смислу и знаш да на тај начин око •) M црташ по реду све спољашње углове многоугла и тачно добијаш пун угао.

Теорема: *Збир свих спољашњих углова ма каквог многоугла је увек 360^0.*

Баш као у троуглу и четвороуглу. Не заборави да ми сада проучавамо само испупчене многоугле.

1. НЕПРАВИЛНИ МНОГОУГЛИ

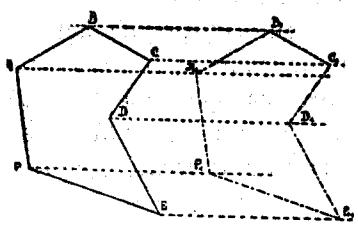
182) Кад нацрташ само врстаром неки многоугао и не очекујеш да ће му странице бити једнаке а још мање углови. Такви су многоугли на сл. 99 и 100. Назваћемо их *„неправилни", јер су им неједнаки и углови и странице.*

На сл. 6 видиш неправилни али осно симетрични петоугао DCBЯO. На сл. 101 II видиш у кругу уцртан неправилан шестоугао, добивен на тај начин што су повучена три произвољна пречника и ти видиш да је то неправилан али средишно симетричан шестоугао. По вољи можеш изабрати на периферији круга пет тачака па си добио (сл. 101 I) темена

неправилног **несиметричног петоугла** ABCDE, али је око њега описан круг.

Гледај сада неправилан многоугао који си ти врстарем нацртао (сл. 99). Није осно симетричан, јер нема парова једнаких страница ни парова једнаких углова (чл. 20); не може бити ни средишно симетричан, јер је за то потребно да има парове паралелних и једнаких страница (чл. 149 Ш). И сам видиш да нема круга који би додиривао све његове странице, нити можеш нацртати круг који би пролазио кроз сва његова темена.

Према томе неправилни многоуглови у опште нису ни осно, ни средишно симетрични, нити се може описати ни уписати круг. Изузетно могу имати коју било од ових особина. Учићеш доцније под којим условима могу неправилни многоуглови имати такве особине. Засада само знаш услов, да буде осно симетричан и средишно симетричан.



Сл. — 102

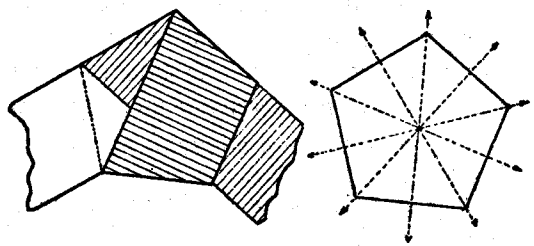
183) *Прецртавање многоугла.* — Ма какав многоугао лако је прецртати, кад га, као на сл. 100, рашчланиш на троугле било зракасто (I), било дијагоналама из једнога темена (II), па прецрташ по реду добивене троугле. Ако га треба прецртати на истој хартији, најлакше је и најтачније помоћу транслације, као што показује сл. 102. Прво избереш нов положај темена A, на пр. у .) A_1. Саставиш AA_1, па из осталих темена повлачиш паралелне с том правом и по свакој паралелној преносиш дуж AA_1, дакле, $\overline{BB_1} = \overline{CC_1} = \overline{DD_1} = \overline{EE_1} = \overline{FF_1} = \overline{AA_1}$. На тај си начин тачно нацртао нова темена. (Паралелне повлачи врстарима).

Кад треба начинити план терена у облику многоугла, радиш на сличан начин. Изделиш терен на троугле или зракасто или дијагоналама, побадајући значке у темена, па у сваком троуглу мериш независне потребне делове ради уцртавања у план. Најбоље је, као што знаш, ако можеш измерити странице тих троуглова, па их уносити на исти начин смањене у план, на пр. километре ћеш представљати сантиметрима. Ако је терен такав да не можеш непосредно мерити саме дужи, послужићеш се пољским угломером да што тачније измериш потребне углове, које уносиш, као што ти је познато, без икакве промене. (чл. 104. 2.)

2. ПРАВИЛНИ МНОГОУГЛИ

184) Исеци од хартије траку да јој је дужина бар 7 пута

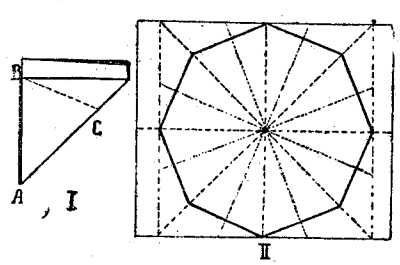
већа од ширине. Сави је као да везујеш „машну" (сл. 103). Пажљиво затежи крајеве A и B, да се додирну суседне ивице, везуј „машну", али да се не гужва и не набира. Поравни. Можда нећеш одмах успети, али после мало вежбања добићеш леп петоугао (II), који ти својом симетричношћу говори: једнаке су му све странице и једнаки су сви углови. Разумљиво ти је, зашто је за ову врсту многоуглова остављен назив *правилан,* док све остале зовемо неправилним.



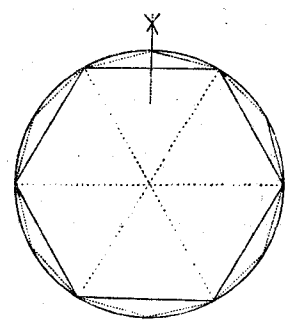
Сл. — 103

Дефиниција. **Правилан је онај многоугао чије су све странице и сви углови једнаки.**

Што пажљивије преклопи на четворо хартију (флис папир), затим на осморо, као што показује сл. 104 I. Одмери $\overline{AC} = AB$ било шестаром било превијањем, пажљиво сави без гужвања по BC. Добро притисни да „легне". Кад расклопиш, симетрија ти каже да си добио правилни осмоугао (II).



Сл. — 104



Сл. — 105

Нацртај ма какав круг па, не мењајући отвор шестара, одмеравај по обиму једнаке тетиве. Оглед ће ти казати да ћеш добити тачно 6 тетива, које су једнаке са полупречником. Спајањем пресечних тачака нацртао си правилан шестоугао (сл. 105).

185) Гледај слике које си добио. Ево шта ти говори њихова симетрија о правилним многоуглима:

1. Јасно видиш пет симетрала правилног петоугла и ако нису „нацртане". Назначи их као на сл. 103 II преклапањем петоугла, па се и огледом увераваш, да си тачно видео, да је симетричан. Видиш и свих осам симетрала осмоугла. Преклопи и огледом докажи симетричност његову. Исто тако видиш и шест симетрала правилног шестоугла и преклапањем по њима провераваш његову симетричност.

Теорема: Сваки правилни многоугао има толико симетрала колико темена.

2. Све три слике показују ти да се све симетрале секу у једној тачки.

Теорема: Све симетрале правилног многоугла секу се у једној тачки. Та се тачка зове *средиште* или *центар правилног многоугла.*

3. Симетрија и даље говори: Средиште је подједнако удаљено од свих темена, центар је описанога круга. Нормална даљина центра од свих страница је иста, дакле је то центар и уписанога круга. Према томе

Теорема: Код свакога правилнога многоугла може се описати и уписати круг; заједнички је центар у пресеку симетрала.

4. *Кад средиште многоугла саставиш са свима теменима, делиш га на толико подударних равнокраких троуглова колико је темена* (на сл. 104 I баш су поклопљени сви такви троугли правилног осмоугла). Лако ти је израчунати угао на темену тих равнокраких троуглова. Поделићеш 360° бројем темена. На пр. код правилног шестоугла износи $360^0:6=60^0$.

Последица: *Правилни шестоугао састоји се из шест равностраних троуглова;* његова је страница једнака с полупречником описанога круга. Јасно ти је сада зашто си могао полупречник круга тачно пренети шест пута по обиму као тетиву.

Последица: Да нацрташ правилни многоугао довољно је да можеш нацртати један од тих равнокраких троуглова, па како му већ знаш угао на темену (јер чим кажеш, на пр., правилни десетоугао, ти одмах знаш да је угао на темену

$360^0:10=36^0$), потребно ти је да знаш само једну дуж тога троугла, на пр. страницу. Према томе

Правилни многоугао је потпуно одређен само једним независним делом (на пр. ако знаш полупречник описаног круга).

186) Врло ћеш лако срачунати један угао правилног многоугла, пошто су сви једнаки. Најлакше ти је наћи прво спољашњи јер је збир њихов код свих многоуглова 360^0. Према томе делиш 360^0 бројем темена па добијаш спољашњи угао (исто као да тражиш угао на темену равнокраких троуглова из којих се састоји правилни многоугао). На пр. код петоугла износи $360^0:5=72^0$, код шестоугла је $360^0:6=60^0$, у осмоугла је $360^0:8=45^0$. Чим одредиш спољашњи, одмах си дознао и унутрашњи као суплеменат. На пр. у осмоуглу је $180^0-45^0=135^0$.

187) До сада су поменуте особине свих правилних многоуглова без обзира да ли је број темена паран или непаран. Посматрај правилни петоугао. Он нема паралелних страница и ти одмах знаш да не може бити средишно симетричан. А кад погледаш правилни шестоугао и осмоугао ти одмах јасно видиш паралелне и једнаке странице, дакле је и средишно симетричан. То ћеш проверити на исти начин као и код ромбоида у чл. 148 било на шестоуглу било на осмоуглу. Дакле за њих важе сва правила средишне симетрије. Понови их и провери огледом на шестоуглу.

Теорема: *И осно и средишно су симетрични само правилни многоугли са парним бројем страница. Непарни су само осно симетрични.*

КОНСТРУКЦИЈА ПРАВИЛНИХ МНОГОУГЛОВА

188) *У круг уписати правилни многоугао.* — Треба кружну периферију поделити на толико једнаких делова, колико има темена многоугао.

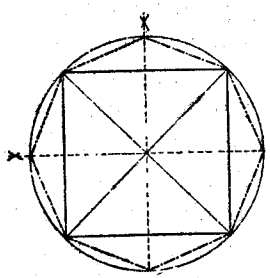
Шестаром и врстаром засада умеш поделити периферију на 6, 12, (све два пута више) или на 4, 8, 16, 32... једнаких делова те добити темена одговарајућих многоуглова.

Видео си већ како се уписује правилни шестоугао

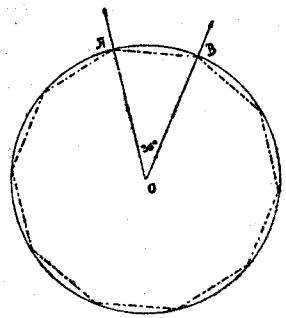
(чл. 184). Деобом добивених шест лукова помоћу симетрала делиш периферију на 12, затим 24 и т. д. (сл. 105).

Ма која два нормална пречника деле периферију на 4 једнака лука, симетрале тих лукова деле обим на осам, затим на 16 ... једнаких делова. Дакле уцртаваш правилни осмоугао, шеснаестоугао и т. д. (сл. 106).

Да упишеш у круг ма какав правилни многоугао на пр. десетоугао мораш се послужити за сада угломером. Из центра О повући ћеш два полупречника ОА и ОВ да граде угао



Сл. — 106



Сл. — 107

$360^0 : 10 = 36^0$. (Зашто?) Јасно ти је да ћеш тетиву АВ моћи помоћу шестара пренети тачно десет пута по периферији, ако си тачно одмерио угао (сл. 107).

189) *Конструкција правилног многоугла, кад је дата страница.* Цртао си већ квадрат.

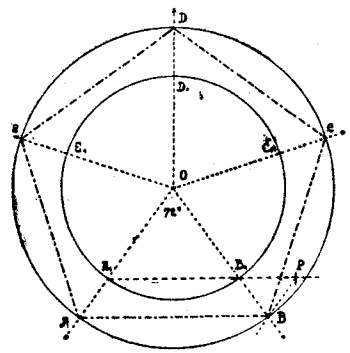
Шестоугао ћеш нацртати по његовој **посебној** особини, да му је страница једнака са полупречником описанога круга. Дакле, страницом ћеш описати круг, па у њему уписати тражени шестоугао.

Ни један други многоугао не можеш засада нацртати без употребе угломера.

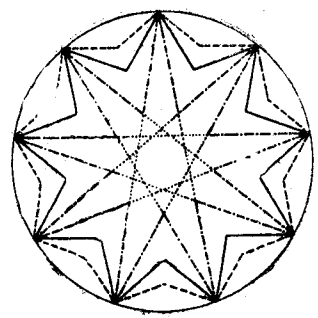
Пример. Нацртати правилни десетоугао, чија је страница 1^{cm}. Прво ћеш нацртати (сл. 107) равнокраки Δ АОВ тако да му је основица $АВ = 1^{cm}$, а налегле углове израчунаваш помоћу супротног угла 36^0, дакле износе $(180^0—36^0):2=144:2=72^0$. Затим ћеш из добивеног темена О описати круг полупречника ОА, па ће се по њему моћи пренети АВ десет пута. **Тешко**

да ћеш одмах успети, те ћеш морати целу конструкцију сасвим испочетка поновити, можда и неколико пута.

Зато је најбоље радити, како је на сл. 108 нацртан правилни петоугао са страницом 25mm. Нацртаћеш ма какав круг и по чл. 188 поделити периферију на 5 једнаких делова тачкама $A_1B_1C_1D_1E_1$, служећи се угломером (сада угао на темену износи $360 : 5 = 72^0$). По A_1B_1 одмери $\overline{A_1P} = 25^{mm}$ (или колико буде дата страница) из .) Р повуци паралелну са OA_1, па у пресеку са OB_1 добијаш .) В. Из .) В повуци паралелну са A_1B_1, те си добио потребни равнокраки Δ АОВ, јер је $\overline{AB} = \overline{A_1P} = 25^{mm}$ (паралелне између паралелних). Описаћеш, дакле, из О круг са ОА и по њему ћеш моћи тачно да пренесеш АВ пет пута. Место преношења



Сл. — 108



Сл. — 109

повуци зраке OC_1, OD_1, OE_1, па си у пресеку с кругом добио темена петоугла ABCDE.

190) *Звездасти правилни многоугао.* (Звезда). — Подели кружну периферију, на пр. на 9 једнаких делова. (сл. 109).

1. — Ако спајаш по реду деоне тачке, добијаш правилни испупчени деветоугао.

2. — Ако при спајању прескачеш по једну тачку, добијаш деветокраку звезду.

3. — Лепшу ћеш звезду добити прескакањем по две деоне тачке (у ствари три равностранa, укрштена троугла).

4. — Најлепшу и највиткију звезду добијаш прескакањем по 3 тачке.

191) Примене правилних многоуглова. — Правилне многоугле виђаш као граничну слику на природним кристалима и вештачким телима. При поплочавању ходника, паркетирању соба, мозаику, (прекривање површја разнобојним плочицама различитога облика) врло се често примењују правилни многоутли.

На сл. 110 показано је неколико начина њиховог удруживања. Јасно ти је да ћеш око једне тачке потпуно покрити равно површје само ка-

је збир углова, којима је та тачка заједничко теме, тачно 360^0.

1. — Према томе ако се употребљују само исте врсте многоуглова (рачунајући у њих и равностранн троугао и квадрат), онда се то може постићи само на три начина: а) удружујући по 6 равностраних троуглова (I), б) удруживањем по 4 квадрата (II), и в) састављањем по 3 правилна шестоугла. (Зашто се, на пр. не би мооли удружити сами петоугли?)

2. — Удруживање разних врста правилних многоуглова са равнокраким троуглима, трапезима и ромбовима може се извести на врло много начина. Неколико видиш на сл. 110. Покушај и сам да начиниш неколико лепших група!

192. — Питања

1) Колико има група многоуглова по, облику? Коју само врсту проучавамо? — 2) Колико дијагонала можеш повући из једнога темена и колико добијаш троуглова? — 3) Колико има свега дијагонала у многоуглу? — 4) Колики је збир свих спољашњих углова и зашто? — 5) Рашчлани и докажи теорему о збиру унутрашњих углова у многоуглу. — 6) Које многоугле називамо правилним а које неправилним? — 7) Коју врсту симетрије показује сваки правилни многоугао? — 8) Које особине дознајеш по осној симетрији правилних многоуглова? Колико има симетриских оса? — 9) Који правилни многоугли имају и осну и средишну симетрију? — 10) На какве троугле можеш рашчланити правилни многоугао. Шта је крак, основица и висина тих троуглова за многоугао? — 11) Који се једино многоугао састоји из равностраних троуглова? — 12) Које правилне многоугле можеш нацртати без употребе угломера? — 13) Како црташ правилне звезде? — 14) Како ћеш прецртати ма какав многоугао? — 15) Како црташ план терена у облику многоугла?

Вежбе и задаци. — 1) Може ли неправилни многоугао бити осно или средишно симетричан; имати обе врсте симетрије; имати и једнаких страница и једнаких углова? — 2) Како ћеш најлакше и најбрже нацртати и осно и средишно симетричан неправилни многоугао? (чл. 153) — 3) Може ли се сваком неправилном многоуглу описати или уписати круг? — 4) Који угао правилног многоугла најбрже израчунаваш? — 5. У ком је правилном многоуглу спољашњи угао 30^0? Колико он има свега дијагонада и колики је збир унутрашњих углова? — 6) Може ли спољашњи угао правилног многоугла износити 50^0? — 7) Повуци све дијагонале из једног темена правилног шестоугла па израчунај све тако добивене угле. (Пођи од крајњих троуглова. Какви они морају бити?) — 8) Повуци све дијагонале правилног петоугла, па израчунај све углове које видиш. — 9) Нацртај правилни осмоугао са страницом 15mm. — 10) Чиме се служиш при деоби кружне периферије на колико било једнаких делова? Можеш ли то постићи шестаром? — 11) Нацртај правилни петнаестоугао па изведи све врсте звезда. Колико ћеш их добити и која ти се највише свиђа? — 12) Ако си за паркетирање изабрао правилни дванаестоугао и квадрат који ће многоугао бити потребна допуна? — 13) Какве многоугле виђаш на снежним кристалима? — 14) На какве делове делиш правилни многоугао са парним бројем страница, кад кроз средиште повучеш коју било тетиву? — 15) Да ли средиште правилног многоугла значи што и средиште симетрије? (Пази!) — 16) Нацртај правилни шестокраки рам, да спољна ивица буде 4cm а ширина рама 5mm. — 17) Нацртај рам у облику правилне деветокраке звезде. — 18) Нацртај правилни петоугао па над сваком страницом нацртај још по један њему подударан. (Ради на картону, па кад правилно исечеш, можеш склопити лепу корпу за дописнице) — 19) Нацртај какав било вишестраник па транслацијом прецртај. — 20) На терену означи значкама многоугао па му нацртај план служећи се само метром.

МРЕЖЕ ПРАВИЛНИХ ПРИЗАМА И ПИРАМИДА

На слици 111 видиш како ти је лако начинити мрежу правилне призме и пирамиде. Развијени огртач правилне призме је правоугаоник чија је основица тачно обим призмине основе а висина једнака призминој висини (I) Развијени огртач правилне пирамиде састоји се из онолико равнокраких подударних троуглова, колико пирамида има страна. Основица троугла је управо страница основе (II). Крак бирај по вољи.

ШТА СИ НАУЧИО ИЗ ГЕОМЕТРИЈЕ ОВЕ ГОДИНЕ

1) **Знатно си попунио свој геометриски речник** и све више увиђаш колико је важан и колико олакшава разумевање нових истина, кад га добро и правилно савладаш. Ма да су у њему поглавито речи из свакидашњег живота, ти их мораш разумети у геометриском смислу, јер се ипак језик геомтриски мора разликовати и разликује се од језика свакидашњег живота. Неће свако разумети кад му кажеш: Транслацијом многоугла ма којим правцем сем по његовој равни постаје призма. А ти то добро разумеш јер си разумео и научио свој геометриски речник.

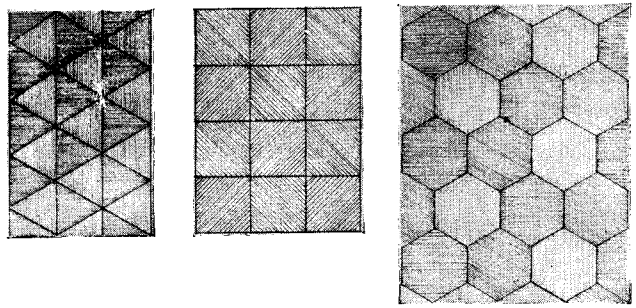
2) **Због нарочитог тумачења које им даје геометрија, многе речи садрже врло важне истине** и оне ти одмах падају на памет чим чујеш ту реч. На пр. када чујеш: осно симетрична слика, у теби те речи изазивају низ важних истина. У мислима ти видиш једну такву слику на пр. сл. 6 и ређају се истине: једнаки су симетрично положени углови; једнаке су и симетрично положене странице и секу се на симетрали а симетрала полови угао између њих; исто тако симетрала полови спојнице симетричних тачака и на њима је нормална; симетрична слика се састоји из две обрнуто подударне слике. И још читав низ истина изазива у теби реч *симетрија.*

3) **Видео си и сам колико ти је користила симетрија при проучавању особина геометриских слика.** Особине симетрале дужи, симетрале угла, равнокраког троугла и трапеза, делтоида постају ти очевидне, јер знаш шта значи осна симетрија. Осна симетрија сама говори о свима особинама правилних многоуглова. А средишна симетрија ти је на врло лак начин открила све особине паралелограма. — У геометрији свуда, где несумњиво утврдиш осну или средишну симетрију, извуци све користи и олакшице које ти оне пружају својим простим правилима. Ти их добро знаш. Запамтио си, јер си видео колико су важна.

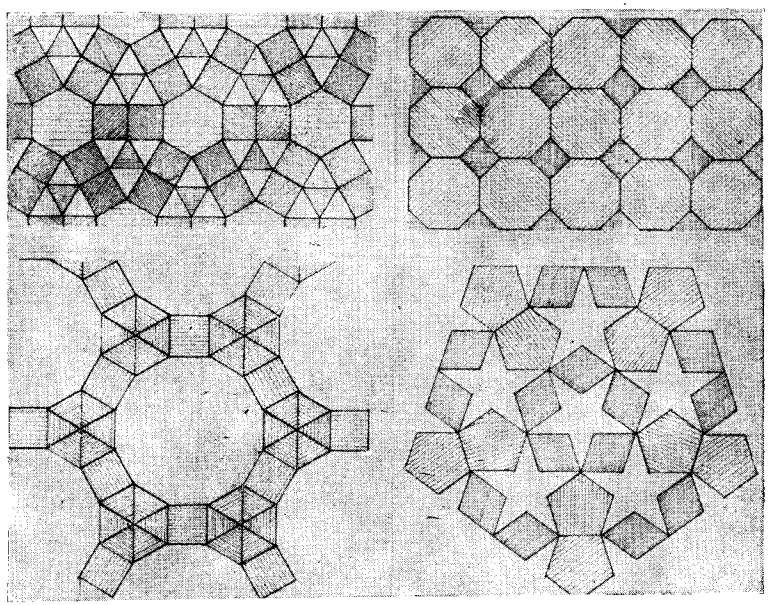
4) **Па и за свакидашњи живот имаш користи од симетрије.** Она ти даје упутство за лако, брзо, лепо и укусно распоређивање предмета било по правилима осне било средишне симетрије, или и по једним и по другим у исти мах. Разумео си да ти лепши утисак даје осна симетрија, јер је то твоја симетрија.

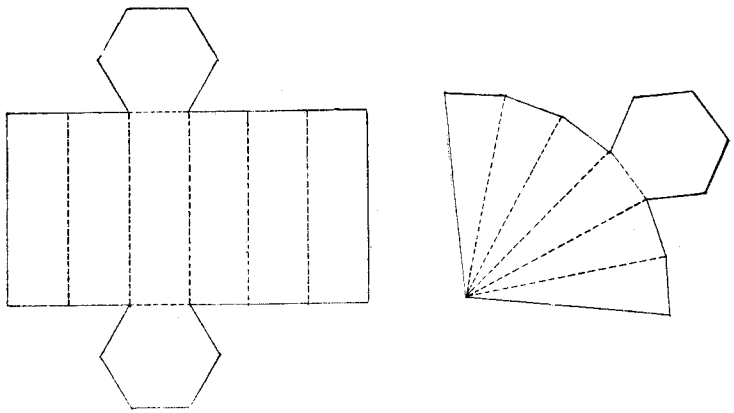
Али не претеруј у свакидашњем животу у симетричном распоређивању и украшавању. Ако претераш, нити је лепо нити живо, постаје чак смешно. Може ли ти се допасти овакав тепих: На средини кладенац, лево стаза, на њој јелен, поред стазе три бора, трава; десно, опет, та стаза, исти јелен, иста три бора, иста трава. Није лепо. Вештина је указати симетрију али је не извести до краја, сем где је неизбежно. Угледај се на природу, она је и у томе недостижан уметник.

5) **Много си корисних и важних истина научио.** *Сети се само важних правила о одређености и подударности два троугла:* Два су троугла несумњиво подударна ако су им по реду једнака три независна дела, сем случаја: по две странице и угли према мањем пару једнаких страница. Наставник није тражио да докажеш, али ти је показао како се може применом тих правила чистим размишљањем доказати нека истина на основу раније познатих истина. А видео си у применама на терену колико су важна правила о одређености троугла. Како је чудно и невероватно изгледало: одреди раздаљину од места где си до неке потпуно неприступне тачке. Али ти си знао правила одређености, сад их врло добро знаш и за тебе то није више ни чудно ни немогуће.



Сл. — 110





Сл. — 111

6. — Ти си дознао и умеш да „израчунаш" колико дијагонала има хиљадостраник и колики је збир свих унутрашњих углова његових. Није то баш толико важно. Ево шта је ту било најважније:

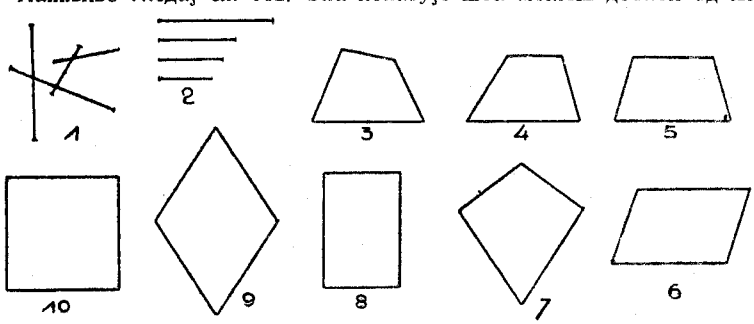
У већини случајева, све до тога питања о збиру унутрашњих углова, многоуглових, ти си се служио огледом да дознаш нову истину и одговориш на ново питање које ти поставља геометрија. Разуме се, без пажљивог „посматрања" и правилног „размишљања" оглед ти не би ништа казао. Али је дошло питање: колики је збир унутрашњих углова хиљадостраника. И да хоћеш не можеш прибећи огледу т. ј. мерити редом свих 1000 углова угломером па сабрати, јер не можеш нацртати испупчени хиљадостраник. Чак и да га нацрташ, унапред знаш да не можеш добити тачан одговор, јер при сваком читању на угломеру погрешићеш скоро за 30′ а то за 1000 углова чини 500°. Ти си ипак дознао и брзо и лако да тај збир тачно израчунаш. Како? — Размишљао си, јер си морао размишљати. Није било избора. Казао си: „ја знам колико троуглова добијам, кад повучем све дијагонале многоуглове из једнога темена; већ од раније знам, колики је збир унутрашњих углова једнога троугла и закључујем: збир свих унутрашњих углова многоугла добијам, кад 180° помножим са бројем који је за два мањи од броја темена."

У геометрији ћеш све чешће наилазити на питања ове врсте, на која је немогуће дати одговор огледом него једино правилним размишљањем на основу раније познатих истина. Дознао си и уверио се, да је тачно оно што ти је наставник рекао: *геометрија је толико савршена наука да све њене истине можеш чистим размишљањем дознати помоћу раније познатих истина.* Тако ћеш их само и доказивати у вишим разредима.

7) Много си још корисних истина научио ове године из геометрије. Али, као ни много старији од тебе, ти ниси могао приметити да и **геометриске слике говоре и поучавају.**

Начини од пластелина, ваљањем, произвољно четири палице. Начинио си груби модел четири дужи.

Пажљиво гледај сл. 112. Она показује шта можеш добити од њих.



Сл. — 112

Сл. 1 показује какав изглед пружају те четири палице разбацане без

икаквога реда. Ни мало није привлачна та заједница, где свако вуче на своју страну. Ти једва можеш, при мањој разлици, оценити која је већа а која мања, „која више вреди која мање". Неред је.

Ти волиш ред. Своје си палице поврстао као на сл. 2. Зато јасно видиш, која је већа, „која више вреди". И од тако поврстаних палица по вољи бираш према величини, да од њих градиш четвороугле, „уређене заједнице". Сл. 3 показује један трапезоид, најнеправилнији четвороугао.

Можеш таквих заједница начинити врло много, разнога облика, јер ти знаш, да је трапезоид тачно одређен тек са пет својих независних делова. Па ипак, ма како начинио трапезоид, наилазиш на неке заједничке особине. Теби је за сада позната само особина о угловима.

Учио си геометрију, зато знаш да можеш добити још пријатнију за око заједницу и ти од својих палица градиш разнокраки трапез сл. 4 и знаш да их не можеш много начинити, јер је разнокраки трапез тачно одређен са четири своја независна дела, те ћеш моћи начинити само један, ако свакој палици унапред наменииш, шта треба да претставља у трапезу.

Ништа савршеније не можеш добити од те четири неједнаке палице. Додај мало пластелина најмањој да добијеш две једнаке палице. Ти сад знаш да од њих можеш начинити само једну још лепшу и савршенију заједницу — равнокраки трапез, сл. 5, јер је он тачно одређен са своја три независна дела. Савршенија је, јер си ублажио неједнакости. Лепша је, јер је уведено више реда, увео си огледалску симетрију.

Ти се сећаш средишне симетрије и хоћеш да палице покажу ту симетрију. За то ти је потребно два пара једнаких палица и ти додајеш једној мало пластелина и градиш ромбоид сл. 6. Знаш да таквих заједница можеш начинити врло много са два пара једнаких палица, јер је ромбоид тачно одређен тек са три своја независна дела.

Несумњиво да је овај распоред далеко лепши од распореда под 1, 3, 4. Али ћеш за око добити још лепши, ако начиниш делтоид, сл. 7. И ти добро знаш, зашто ти изгледа лепши. И оваквих заједница можеш много добити, јер је и делтоид тачно одређен тек са три своја независна дела.

Видиш! Уводиш све више реда и заједница постаје све лепша, све је мање неједнакости у саставним деловима. Још више реда добићеш, кад од та два пара једнаких палица начиниш правоугаоник, сл. 8, јер си увео и осну и средишну симетрију.

Додајеш још мало пластелина, изједначујеш све палице, па градиш витки ромб, сл. 9, осно и средишно симетричну заједницу једнаких палица. Можеш по вољи мењати нагиб између двеју узастопних палица, добити ромбове разнога облика, јер је ромб, као и правоугаоник, потпуно одређен са два независна дела. Осећаш и поред све ромбове правилности, да можеш ипак нешто мењати по својој вољи а да не реметиш основне и заједничке особине заједнице.

Ну само један квадрат можеш начинити од те четири једнаке палице, сл. 10. Најсавршенија и најправилнија је то заједница. Све је потпуно изједначено. Али си лишен сваке слободе. Ништа не смеш мењати. Осећаш се скучен.

Погледај још једном све слике! Око ти се задржава на равнокраком трапезу, делтоиду, правоугаонику и ромбу. Непријатно ти је да погледаш неред на слици 1, али те не привлачи ни савршена правилност квадрата.

Видиш: и хладне геометриске слике умеју говорити. Геометрија те је научила, да разумеш шта ти говоре. Оне ти јасно говоре и саветују: Није добра заједница као на сл. 1, где је све у раскорак. У заједници мора бити реда и симетрије, што мање неједнакости али и умерености. Много оне још говоре.

Разумећеш у вишим разредима.

С А Д Р Ж А Ј

Стр.

I СИМЕТРИЈА

1. Симетрија тела према равни (огледалска симетрија) — — 3
2. Осна симетрија равне слике — — — — — — — 9
3. Симетрала дужи — — — — — — — — — — 14
4. Симетрала угла — — — — — — — — — — 15
5. Равнокраки и равностран троугао — — — — — — 17
6. Проверавање осне симетрије — — — — — — — 17

II УГАО

1. Конструктивни задаци — — — — — — — — — 20
2. Рачунски задаци — — — — — — — — — — 22
3. Углови са заједничким теменом — — — — — — — 25
4. Паралелне праве и углови — — — — — — — — 26

III ПИРАМИДА — — — — — — — — — — — — 32

IV ТРОУГАО

1. Углови у троуглу — — — — — — — — — — 34
2. Аксиоме и теореме — — — — — — — — — 40
3. Однос између страница и углова — — — — — — 42
4. Однос између страница — — — — — — — — 43
5. Значајне праве у троуглу — — — — — — — — 44

V ОДРЕЂЕНОСТ И ПОДУДАРНОСТ ТРОУГЛОВА — — — 48

VI ТРАНСЛАЦИЈА ТЕЛА — — — — — — — — — — 62

VII ПРИЗМА — ПАРАЛЕЛОГРАМ — — — — — — — 66

VIII ЧЕТВОРОУГЛИ — — — — — — — — — — — 69

а. Трапезоиди — — — — — — — — — — 70
б. Паралелограми — — — — — — — — — — 73
в. Средишна симетрија — — — — — — — — — 74
г. Особине и конструкције паралелограма — — — — — 78
д. Трапези — — — — — — — — — — — 84

IX МНОГОУГЛИ — — — — — — — — — — — — 89

1. Неправилни многоугли — — — — — — — — — 91
2. Правилни многоугли — — — — — — — — — — 92

X МРЕЖЕ ПРАВИЛНИХ ПРИЗМИ И ПИРАМИДА — — — — 100

XI ШТА СИ НАУЧИО ИЗ ГЕОМЕТРИЈЕ ОВЕ ГОДИНЕ — — 100